This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

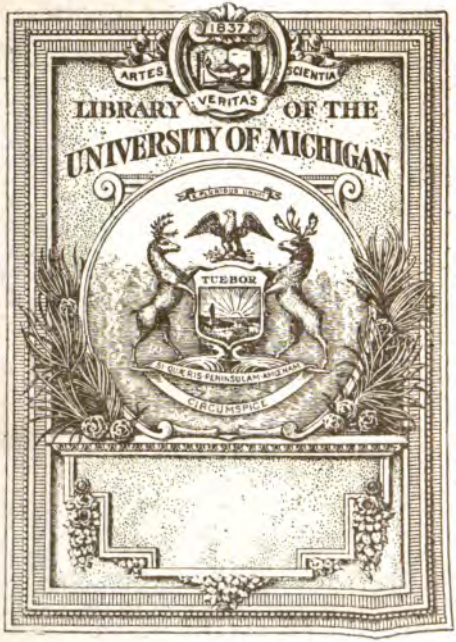
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

Mathematic
QA
33
.V85

5269 Alexander Ziwet 3·9

MANUALI HOEPLI

TEORIA

DELLE

FUNZIONI ANALITICHE

DI

GIULIO VIVANTI

PROF. ORDINARIO NELLA R. UNIVERSITÀ DI MESSINA.

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAJO DELLA REAL CASA

MILANO

1901.

Prof. Alex. Ziwet
gr.
2-13-1923

PROPRIETÀ LETTERARIA.

Milano, Tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C.

Math

PREFAZIONE.

La teoria delle funzioni analitiche, nata da un quarto di secolo appena, ha raggiunto in questo breve periodo un così fiorente sviluppo, che sembra ormai venuto il momento di raccoglierne ed ordinarne i risultati. È questo lo scopo del presente lavoro.

Nella compilazione di esso mi sono attenuto costantemente al metodo *elementare* di Weierstrass, che, rendendo l'Analisi indipendente dal Calcolo infinitesimale, fa di essa una continuazione immediata dell'Algebra, mentre secondo il metodo di Cauchy e Riemann essa appare piuttosto come il Calcolo infinitesimale delle quantità complesse. Questa esclusività verrà variamente giudicata; ed io stesso non disconosco che possa essere utile, sotto qualche riguardo, valersi promiscuamente dei due metodi, come ne danno l'esempio egregi analisti. Tuttavia ritengo che l'uso d'un unico metodo giovi all'euritmia ed all'eleganza dell'esposizione; e inoltre — ciò che è più importante — che il

417716

cercare di procedere quanto più innanzi si può coll'aiuto d'un solo istrumento sia fatica tutt'altro che inutile, ed anzi, per lo sforzo che richiede, possa condurre a notevoli risultati.

Il volume è diviso in tre parti. Nella prima ho raccolto tutte quelle nozioni della teoria degli aggregati che costituiscono un sussidio indispensabile dell'Analisi. Nella seconda ho esposto la parte della teoria delle funzioni analitiche che è divenuta ormai classica. Nella terza infine ho riunito quei nuovi capitoli della teoria che, tuttora in via di formazione, non permettono peranco una trattazione sistematica.

Questa terza parte consta, per necessità di cose, di capitoli staccati e senza un nesso evidente fra loro; e gli argomenti vi sono esposti, quali per esteso, quali succintamente. Non avrei potuto fare altrimenti senza rinunciare alla rigorosa uniformità di metodo che mi sono imposta, e, più ancora, senza togliere al libro il carattere di un Manuale. Infatti le dimostrazioni di alcuni autori si fondano su basi estranee alla teoria di Weierstrass, e d'altra parte i procedimenti geniali di Poincaré, Picard ed altri non sono ancora stati abbastanza chiariti in tutti i loro punti per poter essere esposti con quella precisione di dettagli che si esige in un trattato. A chi fosse portato a giudicare troppo severamente questa parte del mio lavoro, dirò che, nell'accingermi alla non lieve fatica della compilazione di essa, ho avuto in animo, non tanto

di esporre ciò che finora è stato fatto, quanto piuttosto di mettere in luce il molto che ancora resta a farsi, di mostrare quali nuovi e fecondi campi sieno aperti all'ingegno ed all' attività dei giovani analisti.

Devo la più viva riconoscenza al mio carissimo amico prof. Gino Loria dell'Università di Genova, che coi suoi suggerimenti e coll'aiuto prestatomi nella correzione delle bozze concorse a rendere per avventura meno imperfetto questo modesto lavoro.

Messina, giugno 1901.

G. VIVANTI.

INDICE DELLE MATERIE.

PARTE PRIMA.

ELEMENTI DELLA TEORIA DEGLI AGGREGATI.

Art.	1-11.	Definizioni e teoremi fondamentali	Pag.	1
„	12-26.	Potenza degli aggregati.	„	6
„	27-37.	Aggregati speciali	„	16
„	38-44.	Teoremi sugli aggregati di punti . .	„	24
„	45-66.	Numeri trasfiniti	„	30
„	67-81.	Applicazione della teoria dei numeri trasfiniti allo studio degli aggregati	„	45

PARTE SECONDA.

TEORIA GENERALE DELLE FUNZIONI ANALITICHE.

Art.	82-84.	Funzioni dei punti d'un campo . .	Pag.	62
„	85-96.	Serie di potenze	„	65
„	97-105.	Valor medio e sue applicazioni . .	„	80
„	106-117.	Derivata ed integrale d'una serie di potenze	„	93
„	118-124.	Serie dedotte	„	105
„	125-136.	Funzioni analitiche	„	115
„	137-148.	Punti singolari. Teorema di Laurent	„	126
„	149-162.	Le funzioni razionali considerate come funzioni analitiche. Le espressioni aritmetiche	„	146
„	163-175.	Generalità sullo studio sistematico delle funzioni analitiche. Proprietà fondamentali delle funzioni intere	„	165

Art. 176-201. Studio delle funzioni intere . . . . Pag. 202
„ 202. Funzioni aventi un solo punto singolare posto a distanza finita ($C1\,b$) „ 244
„ 203. Funzioni aventi un numero finito di punti singolari ($C2$). . . . . „ 245
„ 204. Funzioni con infiniti poli ed un solo punto singolare essenziale ($C3\,a$). „ ivi
„ 205. Funzioni con infiniti poli ed un numero finito di punti singolari essenziali ($C3\,b$) . . . . . „ 246
„ 206-214. Funzioni con infiniti punti singolari qualunque ($C3\,c$). Teorema di Mittag-Leffler . . . . . „ 247

PARTE TERZA.

COMPLEMENTI DELLA TEORIA DELLE FUNZIONI ANALITICHE.

Art. 215-221. Ricerche di Poincaré, Hadamard, Borel ed altri intorno alle funzioni intere. Teoremi di Picard . . . Pag. 269
„ 222-234. Rappresentazione d'una funzione analitica . . . . . „ 275
„ 235-240. Funzioni lacunari . . . . . „ 304
„ 241-250. Sul concetto di continuazione analitica „ 314
„ 251-260. Relazioni tra le singolarità di due funzioni analitiche . . . . . „ 336
„ 261-269. Studi intorno alla distribuzione dei punti singolari d'una serie di potenze sulla periferia del suo cerchio di convergenza. Ricerche di Pringsheim . . . . . „ 364
Lista bibliografica . . . . . „ 401
Indice alfabetico . . . . . „ 429

PARTE PRIMA.

ELEMENTI DELLA TEORIA DEGLI AGGREGATI. *

Definizioni e teoremi fondamentali.

1. Dicesi *intorno* d'un punto in un piano un campo piano, di forma e di dimensioni arbitrarie, contenente nel suo interno quel punto.

In certe ricerche analitiche è opportuno — a differenza di ciò che si fa nella Geometria — considerare il piano come avente un solo punto all'infinito. In tal caso conviene chiamare intorno del punto all'infinito la parte infinita di piano che rimane al di fuori di un contorno finito qualunque. **

---

* Per la bibliografia dell'argomento vedi VIVANTI, 203, 204, 213. (NB. Questi numeri si riferiscono alla — Lista bibliografica — che si trova in fine del presente volume.) — Un' estesa trattazione della teoria degli aggregati fu pubblicata recentemente da SCHÖNFLIES (186). — Sullo stesso argomento Miss HARDCASTLE sta preparando un rapporto da pubblicarsi negli *Atti dell'Associazione Britannica.*

** Riguardo alla via per cui si giunge a questa definizione, vedasi il mio *Corso di calcolo infinitesimale*, pag. 20 e 67. Messina, Trimarchi, 1899.

2. Chiamiamo *aggregato* un insieme ben definito di elementi d'una determinata classe, tale cioè che, dato un elemento, possa sempre decidersi se esso appartenga o no all'insieme. Noi avremo a considerare particolarmente gli aggregati di punti posti in un piano.

Un aggregato dicesi *finito*, se, togliendo da esso successivamente elementi e facendo corrispondere a questi ordinatamente i termini della serie naturale dei numeri, si giunge infine ad un termine di questa, oltre il quale l'operazione non può più ripetersi, perchè furono ormai tolti tutti gli elementi dell'aggregato. Designando pertanto tali elementi con una medesima lettera portante per indici rispettivamente i numeri che ad essi corrispondono, potrà sempre rappresentarsi un aggregato finito così:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

Un aggregato non finito dicesi *infinito*.

3. Un punto dicesi *punto limite* d'un dato aggregato di punti posti in un piano, se in qualunque suo intorno sono contenuti punti dell'aggregato diversi da esso. — P. es.: l'aggregato di tutti i punti del piano, le cui coordinate cartesiane rispetto a due assi sono razionali, ha per punti limiti tutti i punti del piano; l'aggregato di tutti i punti d'intersezione di due fasci di rette parallele ed equidistanti ha per solo punto limite il punto all'infinito.

Un punto limite d'un aggregato può, o non, appartenere all'aggregato stesso.

4. *Un aggregato finito non ha alcun punto limite.*

Infatti:

a) Il punto all'infinito non può essere un suo punto limite, perchè si può sempre descrivere un contorno finito che racchiuda tutti i punti dell'aggregato posti a distanza finita;

b) Un altro punto qualunque P non può esserlo, perchè, se δ è la più piccola tra le distanze di P dai vari punti dell'aggregato (escluso P stesso, se ne fa parte), un cerchio col centro in P e di raggio minore di δ non può racchiudere alcun punto appartenente all'aggregato, tranne tutt'al più P stesso.

5. *Un aggregato infinito ammette almeno un punto limite.*

Possono darsi due casi: o esiste un rettangolo di dimensioni finite contenente nel suo interno tutti i punti del dato aggregato A, o non ne esiste alcuno. Nel secondo caso il punto all'infinito del piano è un punto limite dell'aggregato. Nel primo caso, diviso il rettangolo considerato α in 4 rettangoli eguali β_1, β_2, β_3, β_4 mediante due parallele ai lati, uno almeno dei 4 rettangoli, p. es. β_1, conterrà infiniti punti di A. Diviso β_1 nello stesso modo in 4 rettangoli eguali γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, uno almeno di questi, p. es. γ_1, conterrà infiniti punti di A. E così di seguito. Le coordinate dei vertici dei rettangoli α, β_1, γ_1, ... rispetto a due assi paralleli ai lati di α formano due *coppie di classi*, e il punto P avente per coordinate i loro *elementi di separazione* è interno a tutti quei rettangoli; dato quindi un intorno qualunque di P, può sempre trovarsi un primo rettangolo della successione in esso contenuto, sicchè l'intorno rac-

chiude certamente infiniti punti di A. Dunque P è punto limite del dato aggregato.

6. L'insieme di tutti i punti limiti d'un aggregato A dicesi il *derivato* di A e si denota con A'. Se A' consta di infiniti punti, esso ammette un insieme derivato A'', che dicesi *derivato secondo* di A. E così via.

Se dopo un numero finito n di derivazioni si ottiene un aggregato finito $A^{(n)}$, si dice che A è *di primo genere* e *di specie n;* in caso contrario A dicesi *di secondo genere.*

7. *Qualunque sia l'aggregato A, A'' è contenuto in A'.*

Se P è un punto qualunque di A'', descritto un cerchio δ comunque piccolo col centro in P, entro di esso giaceranno punti di A' diversi da P. Sia Q uno di questi; descritto, col centro in Q, un cerchio ε interno a δ e non contenente P, in ε giaceranno punti di A. Ne segue che entro δ stanno punti di A diversi da P, sicchè P è un punto limite di A e perciò appartiene ad A'.

8. Un aggregato si dice *isolato*, se non ha alcun punto comune col suo derivato; *chiuso* se contiene il suo derivato; *concentrato* * se è in esso contenuto; *perfetto* se è identico al suo derivato.

Un aggregato dicesi *denso* ** in un campo, quando tutti i punti del campo sono suoi punti limiti, quando cioè non v'ha alcuna parte (a due

---

* Cantor lo chiama *insichdicht* (condensato in se stesso).

** Seguendo Borel (16, pag. 38), adotto la parola *denso* in luogo dell'altra *condensato* comunemente in uso.

dimensioni) del campo, per quanto piccola, non contenente punti dell'aggregato.

Un aggregato dicesi *connesso* se, presi due punti qualunque P, Q di esso, e data una quantità σ arbitrariamente piccola, può trovarsi un numero finito di punti $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dell'aggregato, tali che i segmenti PA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$, A_nQ sieno tutti minori di σ.

Un aggregato perfetto e connesso dicesi *continuo.*

9. *Ogni aggregato connesso è concentrato.*

Infatti, se un punto P dell'aggregato non fosse un suo punto limite, si potrebbe descrivere un cerchio col centro in P non contenente, oltre P, alcun altro punto dell'aggregato; e però non sarebbe possibile congiungere P con un altro punto dell'aggregato mediante una spezzata come quella dell'art. prec. avente i lati minori del raggio di quel cerchio.

10. *Se un aggregato A è concentrato, il suo derivato è perfetto.*

Sia P un punto di A', ossia un punto limite di A; poichè A è contenuto in A', P sarà punto limite di A', e però apparterrà ad A''. Dunque A' è contenuto in A''. Ma A'' è contenuto in A' (articolo 7), quindi A' è perfetto.

11. *Se un aggregato perfetto A ne contiene uno chiuso A_1, l'aggregato residuo A_2 è concentrato.*

Sia P un punto di A_2; poichè esso appartiene ad A, sarà punto limite di A, e, non potendo esserlo di A_1 (giacchè tutti i punti limiti di A_1 ap-

partengono ad A_1), lo sarà di A_2. Dunque A_2 è concentrato. *

Potenza degli aggregati.

12. Si dice che due aggregati hanno *egual potenza* o sono *equivalenti*, quando tra i loro elementi (sulla cui natura non si fa alcuna ipotesi speciale) può stabilirsi una corrispondenza *biunivoca* e *completa*, — tale cioè, che ad ogni elemento d'uno degli aggregati corrisponda uno ed un solo elemento dell'altro, e viceversa.

Con ciò noi possiamo ritenere, secondo i principi della teoria generale delle grandezze, di avere legittimamente definito l'ente *potenza*. **

Il concetto d'eguaglianza di potenze da noi introdotto possiede, come è facile accertarsene, le 3 proprietà caratteristiche dell'eguaglianza in genere:

a) Ogni ente è eguale a se stesso.

b) Se un ente è eguale ad un altro, il secondo è eguale al primo.

c) Due enti eguali ad un terzo sono eguali tra loro.

---

* Le definizioni e i teoremi esposti in questo capitolo possono estendersi immediatamente agli aggregati di punti posti in uno spazio ad n dimensioni.

** Vedi Bettazzi, *Teoria delle grandezze*, pag. 3-7. Pisa, Spoerri, 1890. — La definizione di potenza è una di quelle che i logici chiamano *definizioni per astrazione*. V. Burali-Forti, *Logica matematica*, pag. 140. Milano, Hoepli, 1894.

L'equivalenza di due aggregati A_1, A_2 si denota col segno:

$$A_1 \sim A_2.$$

13. Il più semplice aggregato infinito che si presenta al nostro studio è quello costituito da tutti i numeri naturali; lo indicheremo con N.

Diremo *numerabile* ogni aggregato avente egual potenza di N.

14. *Qualunque aggregato infinito contiene un aggregato numerabile.*

La proprietà caratteristica, per la quale noi diciamo che un aggregato è infinito, è questa (art. 2): che, dopo aver tolto da esso un numero finito *qualunque* di elementi, sempre altri ne rimangono. Levato pertanto dal dato aggregato A un elemento a_1, ne potremo levare un secondo a_2, e poi un terzo a_3, e tale operazione potrà proseguirsi indefinitamente. Ora l'insieme $a_1, a_2, a_3, \ldots$ è numerabile, perchè fra esso ed N può stabilirsi una corrispondenza biunivoca e completa facendo corrispondere, qualunque sia il numero intero r, all'elemento a_r del primo l'elemento r del secondo.

15. *Se si hanno due aggregati equivalenti, e da ciascuno di essi si toglie un elemento qualsiasi, gli aggregati residui sono ancora equivalenti.*

Sieno A, B i due aggregati, e si tolgano da essi rispettivamente gli elementi a, b. Indicheremo con C, D gli aggregati residui, scrivendo:

$$A = a + C, \qquad B = b + D.$$

Se a e b sono omologhi nella corrispondenza che stabilisce l'equivalenza di A e B, evidentemente la corrispondenza stessa stabilisce l'equivalenza di C e D. Se non lo sono, sia a_1 l'omologo di b in A, b_1 l'omologo di a in B, e scriviamo:

$$C = a_1 + E, \qquad D = b_1 + F.$$

Gli elementi di E e quelli di F sono tra loro omologhi nella corrispondenza precedentemente stabilita; se si fanno inoltre corrispondere tra loro gli elementi a_1 e b_1, si avrà stabilito l'equivalenza degli aggregati C, D.

16. *Nessuna parte finita d'un aggregato può essere equivalente all'aggregato stesso.*

Sia:

$$A_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

una parte finita d'un aggregato A; e suppongasi $A \sim A_1$. Se da A e da A_1 si toglie l'elemento comune a_1, si ottengono ancora due aggregati equivalenti (art. 15); così togliendo successivamente a_2, a_3, ecc. Ma, dopo avere eseguito n volte tale operazione, rimarrà da una parte un aggregato contenente certamente qualche elemento (cioè tutti gli elementi di A non appartenenti ad A_1), dall'altra un aggregato che non ne contiene più alcuno; e l'equivalenza fra essi non può sussistere. Dunque l'ipotesi fatta è assurda.

17. *Qualunque aggregato contenuto in un aggregato finito è finito.*

Sia l'aggregato finito:

$$a_1, a_2, \ldots a_7,$$

e consideriamo la sua parte a_3, a_5, a_6. Invece della corrispondenza:

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, \end{matrix}$$

(dove gli elementi omologhi si sono posti verticalmente gli uni sopra gli altri), possiamo, scambiando a_1 con a_3, formare l'altra:

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \\ a_3, & a_2, & a_1, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, \end{matrix}$$

poi, scambiando a_2 con a_5, la terza:

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \\ a_3, & a_5, & a_1, & a_4, & a_2, & a_6, & a_7, \end{matrix}$$

e infine, scambiando a_1 con a_6, la quarta:

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \\ a_3, & a_5, & a_6, & a_4, & a_2, & a_1, & a_7, \end{matrix}$$

da cui risulta che l'aggregato (a_3, a_5, a_6) è equivalente all'aggregato (1, 2, 3), cioè è finito.

18. Dall'art. 16 segue come caso particolare, tenendo conto dell'art. 17: *Un aggregato finito non può essere equivalente ad alcuna sua parte.* *

---

* Al lettore inesperto, che fosse tentato a giudicare assiomatici alcuni dei risultati qui stabiliti e quindi superflue le relative dimostrazioni, consigliamo di addentrarsi un po' più in questa delicata e difficile parte dell'analisi. Egli si avvedrà ben tosto che alcune delle proprietà, che si sogliono erroneamente considerare come assiomi logici, cessano di sussistere non appena dagli aggregati finiti si passa agli infiniti. Leggasi p. es. il seguito di questo articolo.

A questo teorema fa riscontro il seguente:

Dato un aggregato infinito, esiste sempre un aggregato in esso contenuto e ad esso equivalente.

Sia A un aggregato infinito, e sieno $a_1, a_2, \ldots$ gli elementi d'un aggregato numerabile A_1 in esso contenuto. Scriviamo:

$$A = A_1 + B,$$

e indichiamo inoltre con A_2 l'aggregato ottenuto togliendo da A_1 l'elemento a_1. Tra l'aggregato A e l'aggregato $A_3 = A_2 + B$ in esso contenuto può stabilirsi una corrispondenza biunivoca e completa nel modo seguente: agli elementi B di A si fanno corrispondere in A_3 gli elementi stessi, agli elementi $a_1, a_2, \ldots$ di A si fanno corrispondere gli elementi $a_2, a_3, \ldots$ di A_3. Con ciò è stabilita l'equivalenza di A e del suo aggregato parziale A_3.

19. *Se due aggregati infiniti sono tali, che ciascuno di essi contiene un aggregato parziale equivalente all'altro, essi sono equivalenti.* *

Siano A, B i due aggregati, A_1, B_1 le loro parti tali che:

$$A \sim B_1, \qquad B \sim A_1.$$

Sia A_2 la parte di A_1 omologa alla parte B_1 di B nella corrispondenza tra A_1 e B; sarà:

$$A_2 \sim B_1 \sim A.$$

Sia A_3 la parte di A_2 omologa alla parte A_1 di A nella corrispondenza tra A_2 e A; sarà:

$$A_3 \sim A_1.$$

* V. Borel, op. cit., pag. 104-106.

E così di seguito. Ciascuno degli aggregati A, A_1, A_2, A_3, A_4, ... conterrà tutti i successivi, e noi porremo:

$$A = A_1 + C_1, \qquad A_1 = A_2 + C_2, \ldots$$

Poichè ciascuno degli aggregati A_1, A_2, ... è equivalente all'uno od all'altro degli aggregati infiniti A, B, essi consteranno tutti di infiniti elementi, e il loro processo di formazione potrà continuarsi indefinitamente. Detto D l'insieme degli elementi comuni a tutti quegli aggregati (insieme che può anche eventualmente essere nullo), si avrà:

$$\begin{aligned} A &= D + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \ldots \\ A_1 &= D + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + \ldots \end{aligned}$$

Ora, poichè nella corrispondenza esistente tra A ed A_2 le loro parti rispettive A_1, A_3 sono omologhe, lo stesso avrà luogo per le parti residue C_1, C_3; e però sarà:

$$C_1 \sim C_3.$$

Analogamente si avrà in generale:

$$C_r \sim C_{r+2}.$$

Scrivendo pertanto l'espressione di A così:

$$A = D + C_2 + C_1 + C_4 + C_3 + \ldots,$$

e confrontandola con quella di A_1, si vede che ciascuno dei due aggregati A, A_1 risulta decomposto in un insieme numerabile di aggregati parziali, e che gli aggregati che si corrispondono or-

dinatamente nelle due decomposizioni, o sono identici, o sono equivalenti. Ne segue:

$$A \sim A_1,$$

e quindi:

$$A \sim B.$$

20. Reciprocamente: *Se due aggregati infiniti A, B sono equivalenti, ciascuno di essi contiene un aggregato parziale equivalente all'altro.*

Infatti noi possiamo determinare due aggregati parziali A_1, B_1 tali che (art. 18):

$$A_1 \sim A, \qquad B_1 \sim B;$$

ma:

$$A \sim B,$$

quindi:

$$A_1 \sim B, \qquad B_1 \sim A.$$

21. Sieno A, B due aggregati tali, che A contenga una parte equivalente a B senza che l'inversa abbia luogo; allora A e B non hanno egual potenza (art. 20).

Diremo in tal caso che la potenza di A è *maggiore* di quella di B, od anche che quella di B è *minore* di quella di A.* È facile dimostrare che

---

* Potrebbe credersi a prima giunta che, dati due aggregati A, B, debba aver luogo di necessità uno dei casi considerati: o ciascuno di essi contiene una parte equivalente all'altro, o A contiene una parte equivalente a B, o B contiene una parte equivalente ad A. Invece può presentarsi

i concetti di maggiore e minore così introdotti per l'ente *potenza* possiedono le 3 proprietà caratteristiche (dove α, β, ecc. denotano altrettante potenze):

a) Se $\alpha > \beta$, $\beta < \alpha$.

b) Se $\alpha > \beta$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, ne segue $\alpha' > \beta'$.

c) Se $\alpha > \beta$ e $\beta \geqq \gamma$, $\alpha > \gamma$.

22. *La potenza d'un aggregato è maggiore od eguale a quella di qualunque aggregato in esso contenuto.*

Sia A l'aggregato dato, A_1 una sua parte. In A si può prendere una parte A_1 equivalente, anzi identica, ad A_1, il che dimostra l'asserto.

Di qui e dall'art. 14 segue:

Gli aggregati infiniti aventi la più piccola potenza possibile sono gli aggregati numerabili.

Appunto perciò la potenza degli aggregati numerabili si dice la *prima potenza.*

Segue pure:

Ogni aggregato infinito contenuto in un aggregato numerabile è numerabile.

---

un quarto caso: nessuno dei due aggregati contiene una parte equivalente all'altro. Ciò avviene p. es. se A, B sono composti d'uno stesso numero finito di elementi. La questione, se in questo quarto caso i due aggregati sieno equivalenti, non è stata ancora completamente risolta. Se essa avesse a decidersi in senso negativo, la classe delle potenze presenterebbe questa singolarità, che di due potenze l'una potrebbe non essere nè eguale, nè maggiore, nè minore dell'altra (v. Borel, op. cit., pag. 103). Cantor (*Math. Ann.*, T. 46, pag. 484) asserisce — senza dimostrarlo — che ciò non è possibile.

Si ha anche il teorema più generale:

Se l'aggregato A_1 è contenuto nell'aggregato A, e l'aggregato A_2 in A_1, e se A_2 è equivalente ad A, anche A_1 è equivalente ad A.

23. *L'aggregato formato dagli elementi di due aggregati numerabili è numerabile.*

Sieno $A(a_1, a_2, \ldots)$, $B(b_1, b_2, \ldots)$ i due aggregati. Facendo corrispondere all'elemento a_r il numero $2r - 1$, all'elemento b_r il numero $2r$, si viene a stabilire tra l'aggregato $A + B$ e l'aggregato N una corrispondenza biunivoca completa; il che dimostra l'asserto.

24. *L'aggregato formato dagli elementi d'un insieme numerabile di aggregati numerabili è numerabile.*

Abbiasi l'insieme numerabile:

$$A_1, A_2, \ldots$$

di aggregati numerabili, gli elementi dei quali sieno rispettivamente:

$$\begin{array}{l} a_{11}, a_{12}, \ldots, \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Possiamo disporre questi elementi in una serie semplice nel seguente modo:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \ldots$$

Facendo corrispondere a ciascun elemento il numero che designa il posto da esso occupato nella serie, risulta dimostrato l'asserto.

25. Applicando più volte successivamente questo teorema, può stabilirsi che:

Gli elementi $a_{r_1 r_2 \ldots r_n}$, *dove al posto degli n indici devono mettersi rispettivamente tutti gli elementi di n aggregati numerabili, costituiscono un aggregato numerabile.*

26. *La potenza d'un aggregato non numerabile non muta se si toglie da esso un aggregato numerabile.*

Sia A un aggregato non numerabile, B un aggregato numerabile in esso contenuto. Posto:

$$A = B + C,$$

l'aggregato C non sarà numerabile, giacchè, se esso lo fosse, lo sarebbe pure A (art. 23). Sia D un aggregato numerabile contenuto in C (art. 14); posto:

$$C = D + E,$$

E non sarà numerabile. Tra gli aggregati:

$$A = B + D + E, \qquad C = D + E,$$

può stabilirsi una corrispondenza biunivoca completa come segue: agli elementi di E in A si fanno corrispondere gli elementi stessi in C, agli elementi dell'aggregato numerabile $B + D$ (articolo 23) in A quelli dell'aggregato numerabile D in C. Dunque $A \sim C$.

Aggregati speciali.

27. *L'insieme R di tutti i numeri razionali è numerabile.*

L'aggregato numerabile (art. 24):

$$\pm\frac{1}{1}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \ldots,$$

$$\pm\frac{2}{1}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{2}{3}, \ldots,$$

$$\pm\frac{3}{1}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{3}, \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

contiene tutti gli elementi di R (ed anzi ciascuno di questi ripetuto infinite volte); quindi (art. 22) R è numerabile.

28. *L'aggregato S di tutti i numeri algebrici reali è numerabile.*

Dicesi *numero algebrico reale* ogni radice reale d'un'equazione algebrica a coefficienti razionali e col primo coefficiente eguale all'unità. — Fra tutte le equazioni di questa forma a cui soddisfa un medesimo numero algebrico reale ve n'ha una di grado minimo; e questa, come si sa dall'Algebra, è unica. Il grado di tale equazione dicesi *grado* del numero algebrico.

Dopo ciò sia:

$$x^n + r_1 x^{n-1} + \ldots + r_{n-1} x + r_n = 0$$

un'equazione a coefficienti razionali, $A_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ l'aggregato dei numeri algebrici reali che sono radici di quest'equazione e non lo sono di alcun'altra di grado inferiore. Facendo prendere ad $r_1, r_2, \ldots, r_n$ tutti i possibili valori razionali, si otterranno corrispondentemente infiniti aggregati $A_{r_1 r_2 \ldots r_n}$, che presi insieme conterranno tutti i numeri algebrici reali di grado n, e ciascuno una sola volta. L'insieme di tali aggregati $A_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ è numerabile (articoli 25, 27), e ciascuno di essi contiene nessuno, uno od un numero finito di elementi; quindi (articolo 24) l'insieme dei loro elementi, ossia l'aggregato dei numeri algebrici reali di grado n, è numerabile. Finalmente, facendo variare n per tutti i valori interi e positivi ed applicando un'altra volta l'art. 24, risulta dimostrato il teorema.

29. *L'aggregato T di tutti i numeri reali compresi in un intervallo qualunque non è numerabile.*

Per dimostrare questo teorema, noi stabiliremo che, preso un aggregato numerabile qualunque:

$$a_1, a_2, \ldots \qquad (A)$$

contenuto in T, esistono certo elementi di T non appartenenti ad esso.

Sieno a_{k_1}, a_{k_2} i due primi numeri della serie (A) compresi nell'intervallo $a_1\, a_2$, e sia $k_1 < k_2$. L'intervallo $a_{k_1}\, a_{k_2}$ sarà contenuto entro $a_1\, a_2$, e quindi non potrà racchiudere alcun numero d'indice minore di k_2. Sieno a_{k_3}, a_{k_4} i due primi numeri della serie compresi in $a_{k_1}\, a_{k_2}$, e suppongasi $k_3 < k_4$. Sarà:

$$k_1 \geqq 3, \qquad k_2 \geqq 4, \qquad k_3 \geqq 5, \ldots$$

Continuando allo stesso modo, si otterrà una serie d'intervalli:

$$a_1\ a_2,\ a_{k_1}\ a_{k_2},\ a_{k_3}\ a_{k_4},\ a_{k_5}\ a_{k_6}, \ldots,$$

contenuti ciascuno nel precedente, e tali che:

$$h_r \geqq r + 2,$$

e che $a_{k_{2r-1}}\ a_{k_{2r}}$ può contenere soltanto numeri di indice maggiore di $2r + 2$. La successione:

$$a_1\ a_{k_1}\ a_{k_3}\ a_{k_5} \ldots$$

è crescente e la successione:

$$a_2\ a_{k_2}\ a_{k_4}\ a_{k_6} \ldots$$

è decrescente, e gli elementi della prima sono minori dei corrispondenti della seconda; quindi ciascuna delle due successioni ammette un limite, e il limite p della prima è minore o eguale a quello q della seconda. L'intervallo $p\,q$ (che può anche ridursi eventualmente ad un unico numero) non contiene alcun numero della serie (A). Ne contenga infatti uno a_h; determinato r in modo che $2r + 2$ non sia minore di h, a_h non potrà stare nell'intervallo $a_{k_{2r-1}}\ a_{k_{2r}}$, mentre esso appartiene all'intervallo $p\,q$ che è interno a questo. Con ciò è dimostrato l'asserto.

30. Il teorema precedente può anche enunciarsi geometricamente così:

L'insieme di tutti i punti d'un segmento rettilineo qualsiasi ha potenza superiore alla prima.

Si può dimostrare nello stesso modo che:

L'insieme di tutti i punti d'un arco curvilineo qualsiasi ha potenza superiore alla prima.

Segue inoltre immediatamente:

L'insieme di tutti i punti d'un campo a due (od a n) dimensioni ha potenza superiore alla prima.

31. Combinando il teorema dell'art. 29 con quelli degli art. 26 e 27, si ha:

L'insieme I di tutti i numeri irrazionali contenuti in un intervallo qualsiasi ha la stessa potenza dell'insieme dei numeri reali contenuti nello stesso intervallo.

32. Se si hanno in un piano due segmenti qualunque, finiti o no, $a\,b$, $c\,d$, proiettandoli l'uno sull'altro dal punto d'intersezione delle $a\,c$, $b\,d$ si stabilisce fra i loro punti una corrispondenza biunivoca completa. Dunque:

L'insieme dei numeri reali contenuti in qualsiasi intervallo (o dei punti di qualsiasi segmento) ha sempre la stessa potenza. Questa dicesi la *potenza del continuo lineare.*

Dopo ciò il teorema dell'art. 31 può enunciarsi così:

L'insieme dei numeri irrazionali contenuti in qualsiasi intervallo ha la potenza del continuo lineare.

33. Dagli articoli 25, 27 segue:

L'insieme dei punti d'un campo piano qualunque aventi le due coordinate cartesiane razionali è numerabile.

34. *L'insieme dei punti d'un campo piano aventi le due coordinate irrazionali ha la stessa potenza dell'insieme di tutti i punti del campo.*

Consideriamo per semplicità il quadrato avente i vertici (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1). Se si indicano genericamente con a_{t_1,t_2} i punti di esso (t_1, t_2 designando le coordinate del punto a_{t_1,t_2}), con a_{i_1,i_2} i punti in esso contenuti aventi le coordinate irrazionali, gl'indici t_1, t_2 prenderanno tutti i valori contenuti nell'insieme T dei numeri reali compresi tra 0 ed 1, e gli indici i_1, i_2 prenderanno tutti i valori contenuti nell'insieme I dei numeri irrazionali compresi fra 0 ed 1. Ma (art. 31) $T \sim I$, quindi può stabilirsi una corrispondenza biunivoca e completa fra l'insieme dei valori di t_1 (o di t_2) e l'insieme dei valori di i_1 (o di i_2). Una simile corrispondenza potrà stabilirsi fra le coppie di valori (t_1, t_2), (i_1, i_2) e quindi fra i punti a_{t_1,t_2}, a_{i_1,i_2}.

35. Se si hanno nel piano due campi finiti A, B, si può sempre con una trasformazione per similitudine ottenere da A un campo A_1 contenente nel suo interno B, e analogamente dedurre da B un campo B_1 contenente nel suo interno A. Indicando allora con A, B, ecc. l'insieme dei punti contenuti nei rispettivi campi, si ha:

$$A \sim A_1, \qquad B \sim B_1,$$

inoltre (art. 22):

$$\text{pot. } A_1 \geqq \text{pot. } B, \qquad \text{pot. } B_1 \geqq \text{pot. } A.$$

Ne segue:

$$A \sim B.$$

Si può trasformare punto a punto un cerchio A di raggio 1 nell'intero piano, che denoteremo con

C, facendo corrispondere ai punti della circonferenza di raggio $r < 1$ quelli della circonferenza di raggio $r' = e^{\frac{1}{r}} - e$ (dove e denota la base dei logaritmi iperbolici); la corrispondenza cessa di essere univoca pei soli punti della circonferenza di raggio 1, che hanno tutti per omologo il centro. Ne segue:

$$\text{pot. } C \leqq \text{pot. } A,$$

e quindi (articolo 22), tenuto conto che C comprende A:

$$C \sim A.$$

Infine, se D è un campo infinito qualunque, B un campo finito in esso contenuto, si ha:

$$C \sim A, B \sim A, \quad \text{pot. } C \geqq \text{pot. } D \geqq \text{pot. } B,$$

quindi (art. 22):

$$D \sim B.$$

Può concludersi che:

L'insieme di tutti i punti di qualunque campo piano finito od infinito ha sempre la stessa potenza. Essa può dirsi la *potenza del continuo a due dimensioni.*

E il teorema dell'articolo precedente può enunciarsi così:

L'aggregato di tutti i punti d'un campo piano aventi le coordinate irrazionali ha la potenza del continuo a due dimensioni.

36. Dimostreremo ora che:

L'insieme dei punti d'un segmento e l'insieme dei punti d'un campo piano hanno la stessa potenza.

Prendiamo come segmento l'intervallo $\overline{01}$ dell'asse delle ascisse, come campo piano il quadrato dell'art. 34, e denotiamo il primo con A, il secondo con B. Sia C l'insieme dei punti a_t di A aventi l'ascissa t irrazionale, D l'insieme dei punti b_{u_1,u_2} di B aventi le coordinate u_1, u_2 irrazionali. Poichè ogni numero irrazionale è sviluppabile in modo unico in frazione continua infinita, si avrà colla notazione di Dirichlet:

$$t = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \dots}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots).$$

Dopo ciò si potrà assegnare come corrispondente al punto a_t di C, dove t ha la precedente espressione, il punto b_{u_1,u_2} di D, dove:

$$u_1 = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots), \quad u_2 = (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \dots),$$

e reciprocamente come corrispondente al punto b_{u_1,u_2} di D, dove:

$$u_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \dots), \quad u_2 = (\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}, \dots),$$

il punto a_t di C, dove:

$$t = (\beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{12}, \beta_{22}, \dots).$$

Con ciò si sarà stabilita una corrispondenza biunivoca e completa fra C e D, onde:

$$C \sim D.$$

Ma d'altra parte (art. 31, 34):

$$A \sim C, \qquad B \sim D;$$

quindi:

$$A \sim B.$$

37. I risultati precedenti si estendono senza difficoltà agli aggregati di punti posti in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. Così può concludersi che:

L'insieme di tutti i punti d'un campo ad m dimensioni, e l'insieme di tutti i punti d'un campo ad n dimensioni, dove m ≠ n, hanno la stessa potenza, la quale può dirsi semplicemente *potenza del continuo.* *

---

* Questo risultato parrebbe diminuire di molto l'importanza del concetto di *numero di dimensioni*, e togliere quasi la distinzione tra le funzioni di una e quelle di più variabili. Tutto ciò però cessa di sussistere, quando si voglia aver riguardo alla continuità. Infatti *la corrispondenza biunivoca completa che può stabilirsi tra i punti di due campi ad un numero diverso di dimensioni è necessariamente discontinua*; cioè a punti infinitamente vicini dell'uno dei campi non corrispondono sempre punti infinitamente vicini dell'altro.

Ecco una delle molte dimostrazioni che furono date dell'importante teorema, riferita alla corrispondenza tra il segmento A e il quadrato B dell'art. 36.

Condotte nel quadrato B tutte le parallele all'asse delle ascisse, l'insieme di tutti i punti di una di esse avrà, se la

Un'altra forma sotto cui possono mettersi gli stessi risultati è la seguente:

Gli elementi $a_{r_1 r_2 \ldots r_n}$, *dove uno degli indici percorre tutti gli elementi d'un aggregato avente la potenza del continuo, e gli altri percorrono tutti gli elementi di aggregati aventi potenza eguale o minore di quella del continuo, costituiscono un aggregato avente la potenza del continuo.*

Teoremi sugli aggregati di punti.

38. *Se un campo ad n dimensioni contiene infiniti campi pure ad n dimensioni, separati tra loro od aventi comuni tutt' al più punti del contorno, l'insieme di questi campi è numerabile.*

Supponiamo, per fissare le idee, $n = 2$, e ammettiamo che il campo considerato abbia area finita α; se ciò non fosse, si potrebbe passare a questo caso mediante un'opportuna trasformazione (cfr. art. 35). Fra i campi parziali ve ne sarà tutt'al più uno la cui area superi $\frac{\alpha}{2}$, ve ne saran-

---

corrispondenza è continua, per omologo in A l'insieme di tutti i punti di un segmento; a ciascuna parallela in B corrisponderà in A un segmento, e tutti questi segmenti saranno tra loro separati. Ma l'insieme delle parallele evidentemente ha la potenza del continuo, e l'insieme dei segmenti contenuti in A è, per un teorema che dimostreremo più innanzi (art. 38), numerabile; quindi il risultato ottenuto è assurdo, e la corrispondenza non può essere continua.

no tutt'al più 3 la cui area superi $\frac{\alpha}{4}$, 7 la cui area superi $\frac{\alpha}{8}$, ecc. Prendendo prima l'unico campo, se esiste, di area superiore ad $\frac{\alpha}{2}$, poi quelli compresi fra $\frac{\alpha}{4}$ ed $\frac{\alpha}{2}$, indi quelli compresi fra $\frac{\alpha}{8}$ ed $\frac{\alpha}{4}$, e così via, si verrà a disporre i campi in una serie semplice, dalla quale nessuno di essi resterà escluso, ciò che prova l'asserto.

39. *Se un campo A ad n dimensioni, dove $n > 1$, contiene un aggregato numerabile di punti:*

$$a_1, a_2, \ldots,$$

e se p, q sono due punti non appartenenti a questo aggregato, * *si può sempre andare da p a q lungo una linea continua che non esca dal campo A e non passi per alcuno dei punti $a_1, a_2, \ldots$*

Tracciamo una linea continua qualunque λ, che, senza uscire da A, congiunga p con q. Siccome l'insieme de' suoi punti non è numerabile (articolo 30), essa conterrà certamente infiniti punti diversi dai punti a. Scegliamone un numero finito qualunque $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Se p. es. sul tratto $p\,r_1$ della linea λ v'hanno punti a, cerchiamo di sostituire ad esso un arco di cerchio; poichè l'insieme

* Siamo certi che esistono punti i quali soddisfanno a tale condizione, perchè l'insieme di tutti i punti di A non è numerabile.

di tutti gli archi di cerchio congiungenti p con r_1 non è numerabile, ve ne saranno, in qualunque vicinanza della linea λ, infiniti non passanti per alcun punto a, ed uno qualunque di questi servirà al nostro scopo.

40. *Un aggregato perfetto non è numerabile.* Per stabilire questo teorema, noi dimostreremo che un aggregato numerabile e concentrato non può essere anche chiuso, e quindi non può essere perfetto.

Sia l'aggregato considerato $A(a_1, a_2, \ldots)$, che imagineremo posto in un piano. Poichè ciascun punto a è, per ipotesi, punto limite dell'aggregato, descritto col centro in a_1 e con raggio arbitrario ρ_1 un cerchio γ_1, questo racchiuderà certamente punti di A. Sia a_{k_2} il punto d'indice minimo in esso compreso; facendo centro in a_{k_2} si descriva un cerchio γ_2 che non esca da γ_1 e non racchiuda a_1. Questo cerchio, il cui raggio ρ_2 sarà $< \frac{1}{2}\rho_1$, conterrà certamente punti di A; sia a_{k_3} quello di indice minimo in esso racchiuso. Evidentemente $k_3 > k_2$, giacchè i punti d'indice minore di k_2, essendo esterni a γ_1, lo sono parimenti a γ_2. Così proseguendo, si verrà a formare una serie indefinita di cerchi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, ciascuno dei quali è interno al precedente ed ha raggio minore della metà del raggio di questo. Esisterà pertanto un unico punto p interno a tutti quei cerchi. Esso è un punto limite di A, perchè ogni suo intorno contiene uno dei cerchi della serie considerata (e con esso tutti i successivi), quindi racchiude di necessità punti di A. D'altra parte esso non appartiene

ad A, perchè, se coincidesse p. es. con a_r, esso dovrebbe essere esterno al cerchio γ_{r+1}, il quale non contiene punti di A d'indice inferiore a k_{r+1} e quindi ad $r+1$. Dunque l'aggregato A ammette almeno un punto limite non appartenente ad esso, e però non è chiuso.

41. *Un aggregato isolato è numerabile (o finito).*

Se A è un aggregato isolato di punti posti in un piano, intorno a ciascun punto di A si potrà descrivere un cerchio non contenente alcun altro punto di A. Se poi intorno a ciascun punto si descrive un cerchio che sia metà del precedente, tutti questi cerchi saranno esterni l'uno all'altro; infatti, detti a_1, a_2 due punti di A, ρ_1, ρ_2 i raggi dei cerchi primitivamente descritti intorno ad essi, si avrà:

$$\rho_1 < \overline{a_1 a_2}, \qquad \rho_2 < \overline{a_1 a_2},$$

quindi:

$$\frac{1}{2}\rho_1 + \frac{1}{2}\rho_2 < \overline{a_1 a_2}.$$

Dunque l'insieme di questi cerchi è numerabile (art. 38); ma ciascuno di essi contiene un solo punto di A — il proprio centro — quindi A è numerabile.

42. *Un aggregato, il cui derivato è numerabile o finito, è numerabile.*

Sia A un aggregato, il cui derivato A' sia per ipotesi numerabile o finito.

Denoteremo nel seguito con $D(A, B)$ l'insieme degli elementi comuni a due aggregati A, B, con

$M(A, B)$ l'insieme degli elementi appartenenti almeno ad uno dei due aggregati A, B.

Scriviamo dunque, nel caso nostro:

$$A = D(A, A') + B.$$

I punti dell'aggregato B, non essendo punti limiti di A, non lo sono neppure di B, che è in esso contenuto; sicchè B è un aggregato isolato, e quindi (art. 41) numerabile. Inoltre $D(A, A')$, essendo contenuto nell'aggregato numerabile A', è numerabile (art. 22). Ne segue (art. 23) che A è pure numerabile.

43. Applicando più volte successivamente questo teorema, se ne deduce l'altro:

Ogni aggregato di primo genere è numerabile.

44. *Se A è un aggregato chiuso, può trovarsi un aggregato di cui A è il derivato.*

Questo teorema è il reciproco di quello dell'art. 7.

Posto:

$$A = A' + B, \text{*}$$

---

* In generale, ogniqualvolta scriveremo:

$$P = Q + R, \qquad (\alpha)$$

intenderemo che gli aggregati parziali Q, R non abbiano elementi comuni, ossia che ciascun elemento di P figuri una volta sola nel secondo membro. Ciò posto, dalle due relazioni:

$$P = Q + R, \qquad P = Q + S,$$

si può legittimamente dedurre $R = S$. Invece dalla relazione (α) non si può dedurre:

$$P' = Q' + R',$$

giacchè, anche se Q ed R non hanno elementi comuni, può avvenire che Q' ed R' ne abbiano; può scriversi soltanto:

$$P' = M(Q', R').$$

B sarà (cfr. art. 42) isolato, e quindi (art. 41) numerabile; e poichè i suoi punti, che potranno denotarsi con $b_1, b_2, \ldots$, non sono punti limiti di A, si potrà descrivere intorno a ciascun punto b_r un cerchio γ_r non contenente alcun altro punto di A. Entro ciascun cerchio γ_r costruiamo — ciò che è possibile in infiniti modi — un aggregato di punti C_r avente per unico punto limite b_r, e denotiamo con D l'insieme di tutti i punti degli aggregati $C_1, C_2, \ldots$ È facile vedere che i punti limiti di D sono tutti e soltanto i punti di B e quelli di B', sicchè, tenuto conto che B e B' non hanno alcun punto comune, può scriversi:

$$D' = B + B'.$$

Dopo ciò poniamo:

$$E = D + A';$$

ne segue:

$$E' = M(D', A'') = M(B + B', A'');$$

ma B, non avendo punti comuni con A', non ne ha neppure con A'' che è in questo contenuto (art. 7), quindi può scriversi:

$$E' = M(B', A'') + B.$$

D'altra parte dalla prima relazione scritta segue:

$$A' = M(B', A'');$$

quindi si ha:

$$E' = A' + B,$$

ossia $E' = A$. Dunque esiste un aggregato E di cui A è il derivato.

Numeri trasfiniti.

45. Per procedere più innanzi nello studio degli aggregati, conviene ricorrere ad un nuovo ausiliario, cioè alla teoria dei *numeri trasfiniti.*

Se gli elementi d'un aggregato si imaginano disposti in un certo ordine con legge determinata, per modo che, dati due elementi, possa sempre riconoscersi quale di essi precede l'altro, ossia è di *rango* inferiore all'altro, si dice che quegli elementi costituiscono una *serie ordinata.*

Una serie ordinata si dice *ben ordinata*, quando possiede le due proprietà seguenti:

a) Esiste un primo elemento della serie.

b) Presa una parte * qualunque della serie, esiste un elemento ad essa immediatamente successivo.

È chiaro che non tutte le serie ordinate sono ben ordinate. P. es. la serie formata da tutti i numeri razionali maggiori di zero e minori di uno disposti in ordine crescente non possiede alcuna delle due proprietà *a)*, *b)*.

46. *Ogni parte d'una serie ben ordinata è una serie ben ordinata.*

Sia A una serie ben ordinata, B una sua parte. Se B contiene il primo elemento di A, esso è

* Per *parte* d'una serie ordinata s'intende una serie ordinata i cui elementi appartengono tutti alla data e vi figurano nello stesso ordine relativo in cui si trovano in questa.

anche il primo elemento di B; in caso diverso l'elemento immediatamente successivo a tutti gli elementi di A che precedono tutti quelli di B (elemento il quale esiste, per la proprietà *b)*) sarà il primo elemento di B. Dunque B ammette un primo elemento.

Dividiamo ora B in due parti C, D, di cui la prima preceda la seconda. Poichè D è parte di A, ripetendo il precedente ragionamento può stabilirsi che D ammette un primo elemento; ma questo è immediatamente successivo alla parte C nella serie B, dunque la parte C di questa serie ammette un elemento immediatamente successivo.

Pertanto B possiede ambe le proprietà *a)*, *b)*, e però è una serie ben ordinata.

47. Una corrispondenza biunivoca completa tra gli elementi di due serie ordinate, avente la proprietà che gli elementi omologhi si trovano nel medesimo ordine rispettivo nelle due serie, si dice una *corrispondenza ordinata.* Se fra due serie ben ordinate può stabilirsi una corrispondenza ordinata, si dice che le due serie hanno *egual numero ordinale* o *trasfinito*, o che sono *simili.*

Pel concetto di eguaglianza ora introdotto valgono considerazioni analoghe a quelle dell'art. 12.

La similitudine di due serie ben ordinate A_1, A_2 si denota col segno:

$$A_1 \simeq A_2.$$

Gli elementi di due serie simili costituiscono evidentemente due aggregati di egual potenza.

48. *Tra due serie simili esiste una sola corrispondenza ordinata.*

Infatti questa è completamente determinata dalle due condizioni seguenti: che al primo elemento dell'una serie deve corrispondere il primo dell'altra; e che all'elemento immediatamente successivo ad una parte dell'una deve corrispondere l'elemento immediatamente successivo alla parte omologa dell'altra.

49. Dicesi *segmento* d'una serie ben ordinata la parte di essa costituita da tutti gli elementi di rango inferiore ad un dato elemento. Ogni elemento d'una serie individua un unico segmento, e reciprocamente.

Un segmento è una serie ben ordinata (art. 46).

Un segmento d'una serie si dice *maggiore* o *minore* d'un altro, secondochè l'elemento che lo individua segue o precede l'elemento che individua l'altro.

50. *Una serie ben ordinata non può essere simile ad un suo segmento.*

Supponiamo la serie A simile al suo segmento A_1 individuato dall'elemento a_1. Al primo elemento di A_1 corrisponderà il primo elemento di A, ossia l'elemento stesso; al secondo, il secondo, ecc.; all'elemento consecutivo ad un segmento di A_1 l'elemento consecutivo al segmento omologo, ossia allo stesso segmento, in A_1; in breve tutti gli elementi di A_1 avranno per corrispondenti in A gli elementi stessi. Ne segue che l'elemento a_1 di A, il quale non appartiene ad A_1, non avrà in A_1 alcun omologo. Dunque la similitudine non può sussistere.

51. Poichè di due segmenti d'una stessa serie il minore può considerarsi come un segmento

del maggiore, può dedursi dal teorema precedente che:

Due segmenti diversi d'una stessa serie non possono essere simili tra loro.

E per conseguenza:

Una serie non può essere simile a due segmenti diversi d'un'altra serie.

52. *Se A_1, A_2 sono due segmenti d'una serie A, B_1, B_2 due segmenti ad essi rispettivamente simili d'un'altra serie B, secondochè $A_1 \gtrless A_2$, anche $B_1 \gtrless B_2$.*

Supposto $A_1 > A_2$, l'elemento a_2 di A che individua A_2 farà parte del segmento A_1. L'elemento $\overline{b}_2$ di B_1 che è omologo ad a_2 nella corrispondenza tra A_1 e B_1 individua un segmento $\overline{B}_2$ di B_1, e quindi di B, che è simile ad A_2; ma, poichè $A_2 \simeq B_2$, ne segue $\overline{B}_2 \simeq B_2$. Ora ciò non può sussistere (articolo 51) se $\overline{B}_2$ e B_2 non sono identici. Dunque $\overline{b}_2$ è l'elemento che individua B_2; e, poichè esso appartiene a B_1, può concludersi che $B_1 > B_2$.

53. *Se due serie sono tali, che per ogni segmento dato dell'una di esse può trovarsi nell'altra un segmento simile, e viceversa, le due serie sono simili.*

Si può infatti stabilire una corrispondenza tra gli elementi delle due serie considerando come omologhi gli elementi che individuano due segmenti simili. Tale corrispondenza è completa per ipotesi, biunivoca per l'ultimo teorema dell'art. 51, e ordinata pel teorema dell'art. 52.

54. *Se due serie A, B sono tali, che per ogni segmento di A ve n'è uno simile in B, mentre la inversa non ha luogo, esiste in B un segmento simile ad A.*

Gli elementi che individuano i segmenti di B ai quali non esistono segmenti simili in A costituiscono una parte di B, la quale avrà (art. 46) un elemento di rango minimo b_1. Il segmento B_1 di B individuato da b_1 ha la proprietà che per ogni segmento di B minore di esso, ossia contenuto in esso, v'ha un segmento simile in A; d'altra parte tutti i segmenti di A hanno, per ipotesi, i loro simili in B, e questi sono necessariamente contenuti in B_1. Ne segue (art. 53) che A è simile a B_1.

55. *Date due serie A, B, può aver luogo uno ed uno solo dei seguenti casi:*

a) A è simile a B.

b) Un segmento di B è simile ad A.

c) Un segmento di A è simile a B.

Anzitutto è evidente che per due serie A, B sono possibili soltanto i 4 seguenti casi, i quali si escludono a vicenda:

a) Ogni segmento di A ha il suo simile in B e viceversa. Allora $A \simeq B$ (art. 53).

b) Ogni segmento di A ha il suo simile in B, mentre l'inversa non ha luogo.

Allora (art. 54) esiste un segmento di B simile ad A.

c) Ogni segmento di B ha il suo simile in A, mentre l'inversa non ha luogo. Allora (art. 54) esiste un segmento di A simile a B.

d) Vi è in A qualche segmento a cui non ne esiste alcuno simile in B, e vi è in B qualche segmento a cui non ne esiste alcuno simile in A. Questo caso è impossibile. — Infatti sia (cfr. articolo 54) A_1 il più piccolo segmento di A a cui non ve n'ha alcuno simile in B, B_1 il più piccolo segmento di B a cui non ve n'ha alcuno simile in A. Per ciascun segmento di A contenuto in A_1 ve n'avrà uno simile in B, il quale sarà contenuto in B_1, e reciprocamente, sicchè (art. 53) $A_1 \simeq B_1$. Ma ciò è in contraddizione coll'ipotesi che non esista in B alcun segmento simile ad A_1; dunque il caso considerato è impossibile.

56. Se due serie A, B non sono simili, e se v'ha in A un segmento simile a B, si dice che il numero trasfinito della serie A è *maggiore* di quello della serie B, o che il secondo è *minore* del primo.

Denotando con α, β i numeri trasfiniti di due serie A, B, risulta dal teorema dell'art. prec. che ha luogo *uno ed uno solo* dei 3 seguenti casi:

$$\alpha = \beta, \qquad \alpha > \beta, \qquad \alpha < \beta.$$

57. *Il numero ordinale di qualunque serie infinita è maggiore di quello di qualunque serie finita.*

Stabilita infatti la corrispondenza fra il primo elemento dell'una serie e quello dell'altra, fra il secondo e il secondo, ecc., si giungerà ad esaurire la serie finita senza che sia esaurita l'altra.

58. Giova considerare quale aspetto prendano i concetti esposti quando le serie a cui si vuole applicarli contengono un numero finito di elementi.

Anzitutto una serie *ordinata* d'elementi in numero finito è sempre *ben ordinata.*

Due serie finite sono simili sempre e soltanto quando sono composte d'un egual numero di elementi. Questo numero pertanto, che rappresenta un carattere comune a tutta una classe di serie simili, può assumersi come il loro *numero ordinale.*

Possiamo imaginare la serie naturale dei numeri generata così. Supposto di avere una serie formata d'un unico elemento a, a questo si fa corrispondere il segno 0, e si indica con 1 il *numero ordinale* della serie. Aggiungendo ora ad a un nuovo elemento b, si fa corrispondere 0 ad a, 1 a b, e si designa con 2 il numero ordinale della serie a, b. In generale, definito un numero m, si aggiunge un nuovo elemento alla serie di m elementi che ha servito a generarlo, e, fatti corrispondere ordinatamente agli elementi della serie così ottenuta i numeri $0, 1, \ldots, m$, si designa con $m + 1$ il numero ordinale della serie.

Risulta di qui:

Che la serie naturale dei numeri è una serie ben ordinata;

Che il numero ordinale d'un segmento della serie naturale dei numeri (supposta incominciata da 0) è il numero immediatamente successivo al segmento stesso in questa serie;

Che il numero ordinale d'una serie finita di elementi è quello stesso simbolo col quale si suole designare il numero dei suoi elementi *(numero cardinale).*

59. Quest'ultima osservazione mette in luce una differenza caratteristica esistente tra gli aggregati finiti e gli infiniti.

Se si ha un aggregato finito, in qualunque modo i suoi elementi si dispongano in serie ben ordinata, il numero ordinale di essa è sempre il medesimo — poichè esso è il numero degli elementi dell'aggregato.

La stessa cosa non avviene per gli aggregati infiniti. P. es. l'aggregato di tutti i numeri naturali si può disporre in serie ben ordinata, fra l'altro, nei seguenti modi:

α) Prendendo per primo elemento 1 e facendo seguire ad esso 2, poi 3, e così via:

$$1, 2, 3, \ldots;$$

β) Prendendo per primo elemento 2 e facendo seguire ad esso 3, poi 4, ecc., infine facendo seguire all'intera serie dei numeri così disposti il numero 1:

$$2, 3, \ldots, 1;$$

γ) Prendendo per primo elemento 3 e facendo seguire ad esso 4, poi 5, ecc., infine facendo seguire all'intera serie dei numeri così disposti il numero 1, e a questo il numero 2:

$$3, 4, \ldots, 1, 2;$$

δ) Prendendo per primo elemento 1, e facendo seguire ad esso 3, 5, 7, ecc., poi all'intera serie dei numeri dispari facendo seguire 2, 4, 6, ecc.:

$$1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots$$

Le 4 serie così ottenute hanno tutte numero ordinale diverso. Infatti α è simile al segmento di β che precede l'elemento 1; β al segmento di γ che

precede l'elemento 2; infine α è simile al segmento di δ che precede l'elemento 2, β a quello che precede l'elemento 4, γ a quello che precede l'elemento 6.

Come appare chiaro da questi esempi, la possibilità di disporre gli elementi d'un aggregato in serie ben ordinate non simili tra loro si collega strettamente col fatto già osservato (art. 18), che può aver luogo l'equivalenza tra un aggregato infinito ed una parte di esso.

60. Date due serie ben ordinate A, B, noi possiamo dedurre da esse una nuova serie ben ordinata C facendo seguire all'intera serie A l'intera serie B senza mutare affatto l'ordine degli elementi entro ciascuna delle due serie. Il numero ordinale γ della serie C si dice la *somma* di quelli α, β delle serie A, B:

$$\gamma = \alpha + \beta,$$

e l'operazione corrispondente dicesi *addizione*.

Il concetto di somma si riduce a quello ordinario quando α e β sono numeri finiti.

L'addizione possiede la proprietà associativa; giacchè, date tre serie A_1, A_2, A_3, si ottiene lo stesso risultato ponendo A_2 di seguito ad A_1 e poi A_3 di seguito alla serie così formata, come ponendo A_3 di seguito ad A_2 e poi la serie così formata di seguito ad A_1.

Essa invece non possiede in generale la proprietà commutativa. Si consideri infatti, p. es., la serie dei numeri naturali, il cui numero ordinale si indichi con ω, ed un'altra serie costituita da un unico elemento a (cioè il cui numero ordinale è 1).

Le serie:

$$1, 2, 3, \ldots, a,$$
$$a, 1, 2, 3, \ldots,$$

i cui numeri ordinali sono rispettivamente $\omega + 1$ e $1 + \omega$, non sono simili, giacchè la seconda è simile alla serie dei numeri naturali, ossia al segmento della prima che precede l'elemento a. Si ha cioè:

$$1 + \omega = \omega < \omega + 1.$$

61. Abbiansi ancora due serie ben ordinate A, B, e al posto di ciascun elemento di A si metta una serie simile a B. Detta C la serie così ottenuta, γ il suo numero ordinale, e indicando con α, β quelli delle serie date, γ si dice il *prodotto* di β per α, β il *moltiplicando*, α il *moltiplicatore*:

$$\gamma = \beta\alpha,$$

e l'operazione corrispondente chiamasi *moltiplicazione.*

Il concetto di prodotto si riduce a quello ordinario quando α e β sono finiti.

È facile dimostrare che la moltiplicazione possiede le proprietà associativa e distributiva.

Invece essa non possiede in generale la proprietà commutativa. Si consideri ancora la serie dei numeri naturali, ed inoltre una serie formata di due soli elementi (cioè avente il numero ordinale 2). Le serie:

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots,$$
$$a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots,$$

i cui numeri ordinali sono rispettivamente $2 . \omega$ e $\omega . 2$, non sono simili, giacchè la prima è simile alla serie dei numeri naturali, ossia al segmento della seconda che precede b_1. Si ha cioè:

$$2 . \omega = \omega < \omega . 2.$$

62. Si è denotato con ω il numero ordinale della serie naturale dei numeri. Esso ha la proprietà di essere *il più piccolo dei numeri ordinali trasfiniti* (cioè appartenenti a serie infinite). Infatti qualunque segmento della serie naturale dei numeri costituisce una serie finita, sicchè solo i numeri ordinali finiti sono minori di ω.

Se dopo la intera serie naturale dei numeri si aggiunge un nuovo elemento a_1, si ottiene una serie A_1 il cui numero ordinale è $\omega + 1$ (art. 60). Questo numero possiede le due seguenti proprietà:

Di essere $> \omega$ (giacchè il segmento di A_1 che precede a_1 ha per numero ordinale ω).

Che non esiste alcun numero maggiore di ω e minore di $\omega + 1$ (giacchè un segmento di A_1, o ha il numero ordinale ω, o è finito).

In modo analogo si passa da $\omega + 1$ ad $\omega + 2$, $\omega + 3$, ecc.

Così la serie naturale dei numeri, considerati come numeri ordinali delle serie finite, viene estesa mediante l'aggiunta dei numeri ordinali trasfiniti ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, ecc. Nella serie:

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots$$

ogni numero è maggiore di tutti i precedenti; inoltre due numeri consecutivi hanno la proprietà che non esiste alcun numero maggiore di uno di essi e minore dell'altro.

Il principio che presiede alla creazione dei numeri $\omega + 1$, $\omega + 2, \ldots$ (*primo principio di formazione* di Cantor), e che consiste nell'aggiungere un'unità ad un numero già definito, è quello che ci ha già condotti a generare l'intera serie naturale dei numeri partendo dall'unità. Però l'uso esclusivo di tale principio non ci avrebbe giammai permesso di uscire da questa serie; a tal uopo abbiamo dovuto ricorrere ad un nuovo principio (*secondo principio di formazione*): creazione d'un nuovo numero (il numero ω) definito come il più piccolo numero maggiore di tutti quelli già formati. Mercè questo principio noi potremo creare un nuovo numero, che rappresenta il numero ordinale della serie:

$$0,\ 1,\ 2, \ldots,\ \omega,\ \omega + 1,\ \omega + 2, \ldots,$$

supposta prolungata indefinitamente, ossia il più piccolo numero trasfinito maggiore di tutti quelli della serie stessa. Tuttavia non è necessario denotare questo numero con un simbolo totalmente nuovo; le leggi delle operazioni poc'anzi stabilite ci permettono di indicarlo con $\omega . 2$. Parimenti sarà $\omega . 3$ il numero ordinale della serie:

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega . 2, \omega . 2 + 1, \omega . 2 + 2, \ldots,$$

e così via; sarà $\omega . \omega$ ossia ω^2 il numero ordinale della serie:

$$\underbrace{0, 1, 2, \ldots,}_{A_0}\ \omega, \underbrace{\omega + 1, \omega + 2, \ldots,}_{A_1}\ \underbrace{\omega . 2, \omega . 2 + 1, \omega . 2 + 2, \ldots,}_{A_2}$$

dove s'intende che i gruppi A_0, A_1, $A_2, \ldots$ formino una serie simile a quella dei numeri natu-

rali. In modo analogo potranno definirsi ω^3, ω^4, ω^ω, ω^{ω^ω}, ecc.

I numeri finiti si dicono anche *della prima classe;* quelli formati mediante ω e i numeri finiti diconsi *della seconda classe.*

Un numero della seconda classe dicesi di *prima* o di *seconda specie*, secondochè esso è generato mediante il primo o mediante il secondo principio, ossia secondochè esso ammette o no un numero immediatamente inferiore.

È facile dimostrare (vedi art. 23, 24, 25) che *l'insieme di tutti i numeri più piccoli di un numero determinato della seconda classe è numerabile.*

63. Si presenta ora spontanea una domanda: L'insieme dei numeri fin qui considerati comprende i numeri ordinali di tutte le possibili serie ben ordinate?

A tale domanda risponde il teorema seguente:

Se A è un aggregato numerabile, preso UN NUMERO QUALUNQUE α *di 2.ª classe, si possono disporre gli elementi di A in una serie ben ordinata simile a quella dei numeri ordinali che precedono α; e reciprocamente, se ciò è possibile per* UN NUMERO α, *l'aggregato A è numerabile.*

La dimostrazione di questo teorema è semplicissima. Poichè l'aggregato dei numeri minori di α è numerabile (art. 62), si potrà stabilire una corrispondenza biunivoca completa fra questi numeri e gli elementi di A. Convenendo poi che di due elementi di A preceda quello a cui corrisponde il numero minore, si verrà a disporre gli elementi di A in una serie ben ordinata simile a quella dei numeri minori di α. — Reciprocamente, se tal

cosa può farsi per un numero α, ne segue (art. 47) che A e l'insieme dei numeri minori di α hanno egual potenza, e quindi che A è numerabile.

Il teorema stabilito può enunciarsi più brevemente così: *I numeri della 2.ª classe servono a numerare tutti e soli gli aggregati della prima potenza*, come quelli della 1.ª classe servono a numerare tutti e soli gli aggregati finiti.

Dopo ciò appare evidente la necessità di creare nuovi numeri i quali possano esprimere il numero ordinale degli aggregati non numerabili. E poichè tali numeri non possono comporsi mediante ω e i numeri finiti, essendo i numeri così composti atti a numerare soltanto gli aggregati della prima potenza, converrà introdurre un simbolo affatto nuovo. Come tale assumeremo Ω, il quale verrà definito come *il minimo numero trasfinito più grande di tutti i numeri ordinali delle serie, i cui elementi formano un aggregato numerabile.*

Questo concetto, di introdurre *solo allora* un numero *totalmente nuovo* Ω quando sieno esauriti tutti i numeri atti a numerare le serie, i cui elementi formano un aggregato numerabile, convenientemente generalizzato, come si dirà poi, costituisce il *principio di arresto* o *di limitazione*, il quale stabilisce sotto quali condizioni si deva introdurre un simbolo totalmente nuovo.

Dalla definizione del numero Ω segue che: *Un numero trasfinito è della seconda classe sempre e soltanto se l'insieme dei numeri che lo precedono è numerabile;* e quindi che: *L'insieme dei numeri minori di Ω non è numerabile.*

Inoltre può dimostrarsi che: *Non esiste alcun insieme non numerabile di potenza minore di quella dell'insieme Z di tutti i numeri ordinali minori di Ω*, ossia che: *La potenza dell'insieme Z è la più piccola potenza dopo la prima.* Perciò essa si chiama la *seconda potenza.*

Supponiamo che esista un insieme A non numerabile e avente potenza minore di quella dell'insieme Z. Per definizione esisterà un insieme Z_1 contenuto in Z ed equivalente ad A. Indichiamo con Y la serie ben ordinata dei numeri minori di Ω, con Y_1 la serie ben ordinata (art. 46) ottenuta disponendo gli elementi di Z_1 in ordine crescente. Poichè ogni segmento di Y è numerabile, e Z_1 non lo è, Z_1 non sarà equivalente all'insieme degli elementi d'alcun segmento di Y, e però (art. 47) Y_1 non sarà simile ad alcun segmento di Y. Ne segue (art. 55) che, o Y_1 è simile ad Y, o un segmento Y_2 di Y_1 è simile ad Y. Nel primo caso Z_1 sarebbe equivalente a Z; nel secondo caso un aggregato contenuto in Z_1 sarebbe equivalente a Z, e quindi (art. 22) Z_1 e Z sarebbero ancora equivalenti. Dunque è impossibile che la potenza di A sia minore di quella di Z.

64. Mediante il numero Ω, il numero ω e i numeri finiti, e coll'applicazione dei due principi di formazione, si potranno costruire nuovi numeri trasfiniti. In virtù poi del principio di arresto, dovrà introdursi un numero *totalmente nuovo* allora, e allora soltanto, che l'insieme dei numeri costruiti abbia raggiunto potenza superiore alla seconda.

Il processo descritto non ha, come si vede, alcun limite; e la creazione d'un numero totalmente

nuovo è condizionata alla circostanza, che l'insieme di tutti i numeri già definiti abbia potenza superiore a quella dell'insieme di tutti i numeri minori di uno qualunque dei numeri già definiti.

65. *In ogni insieme di numeri ordinali ve n'è uno più piccolo di tutti gli altri.*

Facendo infatti dell'insieme dato una serie ordinata, col disporre gli elementi in ordine crescente, questa, come parte della serie di tutti i numeri ordinali, sarà (art. 46) ben ordinata; quindi avrà un primo elemento. Questo sarà il minimo dei suoi elementi.

66. *Una serie numerabile di numeri trasfiniti decrescenti è finita.*

Sia la serie data:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,$$

dove $a_s < a_t$ ogniqualvolta $s > t$, e sia a_r il minimo dei numeri della serie (art. 65). Se nella serie esistesse l'elemento a_{r+1}, dovrebbe essere $a_{r+1} < a_r$, il che è contrario all'ipotesi che a_r sia il minimo.

Dunque la serie proposta è finita.

Applicazione della teoria dei numeri trasfiniti allo studio degli aggregati.

67. Si è dimostrato (art. 7) che, qualunque sia A il suo derivato primo, A' contiene il suo derivato secondo A''. Parimenti A'' contiene A''', A''' contiene A^{IV}, ecc. Può avvenire che gli aggregati:

$$A',\ A'',\ A''', \ldots,$$

ciascuno dei quali contiene il seguente, abbiano elementi comuni; l'insieme di questi si dirà il *derivato d'ordine* ω di A, e si denoterà con $A^{(\omega)}$. I derivati successivi di $A^{(\omega)}$ si designeranno con:

$$A^{(\omega+1)},\ A^{(\omega+2)},\ldots,$$

e l'insieme degli elementi ad essi comuni con $A^{(\omega.2)}$; e così via. Allo stesso modo sarà $A^{(\Omega)}$ l'insieme degli elementi comuni a tutti gli aggregati $A^{(\alpha)}$, dove α è un numero qualunque della 1.ª o della 2.ª classe.

Si vede che gli *ordini di derivazione* che andiamo per tal modo formando non sono affatto diversi dai *numeri trasfiniti;* inoltre che, se α è un numero di prima specie, $A^{(\alpha)}$ è il derivato, nel senso ordinario, di $A^{(\beta)}$, essendo $\alpha = \beta + 1$, se α è di seconda specie, $A^{(\alpha)}$ è l'insieme degli elementi comuni agli aggregati $A^{(\gamma)}$, dove γ percorre tutta la serie dei numeri minori di α.

68. *Qualunque aggregato derivato è chiuso.*

Sia $A^{(\alpha)}$ il derivato d'ordine α d'un aggregato A, dove α è un numero ordinale qualunque.

Se α è un numero di 1.ª specie, posto $\alpha = \beta + 1$, $A^{(\alpha)}$ è il derivato primo di $A^{(\beta)}$, e quindi (art. 7) è chiuso.

Sia invece α di 2.ª specie. Supponiamo dapprima $\alpha = \omega$. Allora, detto n un numero finito qualunque, essendo $A^{(\omega)}$ contenuto in $A^{(n)}$, $A^{(\omega+1)}$ è contenuto in $A^{(n+1)}$; gli elementi di $A^{(\omega+1)}$ appartengono quindi a tutti gli aggregati A'', A''', ..., e però appartengono all'insieme $A^{(\omega)}$ degli elementi comuni a tutti questi aggregati. — Sia ora $\alpha = \omega . 2$. Detto γ un numero qualunque minore

di $\omega . 2$, $A^{(\omega.2)}$ è contenuto in $A^{(\gamma)}$, e quindi $A^{(\omega.2+1)}$ in $A^{(\gamma+1)}$; ma, essendo $A^{(\gamma)}$ chiuso qualunque sia $\gamma < \omega . 2$ (come si è testè dimostrato), $A^{(\omega.2+1)}$ è contenuto in $A^{(\gamma)}$, quindi in $A^{(\omega.2)}$, che è l'insieme degli elementi comuni a tutti gli aggregati $A^{(\gamma)}$. Così si può continuare per qualunque numero della 2.ª specie.

69. *Un aggregato di punti A è del 1.° o del 2.° genere, secondochè $A^{(\omega)}$ è o non è nullo.*

Se A è del 1.° genere, evidentemente $A^{(\omega)} = 0$.

Sia ora A del 2.° genere, e supponiamo, per fissare le idee, che i suoi punti giacciano sopra un segmento finito. Diviso questo per metà, i punti di A contenuti in una almeno delle due parti dovranno formare un aggregato del 2.° genere. Continuando il ragionamento in modo noto (cfr. art. 5), si viene a concludere che nel segmento esiste almeno un punto p in ogni intorno del quale è contenuto un aggregato di 2.° genere di punti di A. Sia B l'aggregato contenuto nell'intorno ε di p; poichè, qualunque sia n, $B^{(n)}$ non è nullo e fa parte di $A^{(n)}$, potrà dirsi che in ε sono contenuti punti di $A^{(n)}$. Segue da ciò che p è punto limite di $A^{(n)}$, ossia che appartiene ad $A^{(n+1)}$. Adunque p appartiene ad A'', A''', A^{IV}, ..., e quindi ad $A^{(\omega)}$, il quale pertanto non è nullo.

70. *Se può assegnarsi un numero α della prima o della seconda classe pel quale $A^{(\alpha)}$ è numerabile, lo è pure A', e quindi* (art. 42) *A.*

Se un insieme P ne contiene un altro Q, noi indicheremo con $P - Q$ l'insieme degli elementi di P non appartenenti a Q.

Dopo ciò è facile rendersi ragione dell'eguaglianza seguente:

$$A' = (A' - A'') + (A'' - A''') + \ldots + A^{(\alpha)} =$$
$$= \sum_{\gamma<\alpha} (A^{(\gamma)} - A^{(\gamma+1)}) + A^{(\alpha)}.$$

I termini della somma $\Sigma (A^{(\gamma)} - A^{(\gamma+1)})$ formano un insieme finito o numerabile (art. 62), e ciascuno di essi rappresenta un aggregato isolato, quindi numerabile (art. 41), perciò è numerabile (art. 24) l'insieme di tutti i loro elementi. Supposto dunque che lo sia pure $A^{(\alpha)}$, lo sarà parimenti (art. 23) A'.

71. *Se A' è numerabile, esiste un primo numero α della prima o della seconda classe per cui $A^{(\alpha)} = 0$.*

Scriviamo, analogamente a quanto abbiamo già fatto nell'art. prec.:

$$A' = \sum_{\gamma<\Omega} (A^{(\gamma)} - A^{(\gamma+1)}) + A^{(\Omega)}.$$

Se nessuno degli aggregati $A^{(\gamma)}$ è nullo, essendo $A^{(\gamma)}$ numerabile perchè (art. 22) contenuto nell'aggregato numerabile A', esso non potrà (art. 40) essere perfetto, e però $(A^{(\gamma)} - A^{(\gamma+1)})$ non sarà nullo. Dunque l'insieme dei termini della somma che figura nella relazione scritta non è numerabile (art. 63), e nessuno di essi rappresenta un aggregato nullo. Ne segue che A' non è numerabile, contro l'ipotesi.

Pertanto esistono numeri γ della 1.ª o della 2.ª classe, per cui $A^{(\gamma)}$ è nullo. Fra questi ve ne sarà necessariamente uno minimo (art. 65).

72. *Se A è un aggregato qualunque, A' è o non è numerabile secondochè $A^{(\Omega)}$ è o non è nullo.*

Se A' è numerabile, esiste (art. 71) un numero γ della 1.ª o della 2.ª classe per cui $A^{(\gamma)} = 0$. Ne segue $A^{(\Omega)} = 0$.

Supponiamo ora A' non numerabile. Se, per fissare le idee, imaginiamo A contenuto in un segmento finito, con un ragionamento già usato (art. 69) verremo a concludere, che esiste un punto p del segmento, ogni intorno del quale contiene un aggregato non numerabile di elementi di A. Detto B l'aggregato contenuto nell'intorno ε di p, $B^{(\alpha)}$ non sarà nullo (anzi non sarà numerabile, v. art. 70) per alcun numero α della 1.ª o della 2.ª classe; e, poichè $B^{(\alpha)}$ è contenuto in $A^{(\alpha)}$, l'intorno ε conterrà punti di $A^{(\alpha)}$. Ne segue che p è punto limite di $A^{(\alpha)}$, ossia fa parte di $A^{(\alpha+1)}$, e quindi (art. 68) di $A^{(\alpha)}$ qualunque sia α; onde, per la definizione di $A^{(\Omega)}$, esso appartiene ad $A^{(\Omega)}$. Dunque $A^{(\Omega)}$ non è nullo.

73. *Se A è un aggregato qualunque, $A^{(\Omega)}$ è perfetto.* *

Imaginiamo A contenuto in un segmento $a\,b$, e cominciamo col dimostrare che $A^{(\Omega)}$ non può constare d'un unico punto p di questo segmento. Supposto $A^{(\Omega)} = p$, si divida $a\,p$ per metà in a_1, poi $a_1\,p$ per metà in a_2, ecc. Dicendo B_n la parte di A' contenuta nel segmento $a_{n-1}\,a_n$ (dove si sup-

* Questo teorema comprende anche il caso particolare in cui, A' essendo numerabile, $A^{(\Omega)}$ è nullo (art. 72); giacchè un aggregato nullo è perfetto, essendo identico al suo derivato, che è pure nullo.

pone $a_0 = a$), siccome $B_n^{(\Omega)}$ fa parte di $A^{(\Omega)}$, ed $A^{(\Omega)}$ consta dell'unico punto p, il quale non appartiene al segmento $a_{n-1}\,a_n$, sarà $B_n^{(\Omega)} = 0$, e B_n sarà numerabile (art. 72); ma l'insieme dei segmenti $a_{n-1}\,a_n$ è numerabile, quindi (art. 24) lo sarà pure la parte di A' contenuta in $a\,p$. Analogamente si dimostra che lo è la parte di A' contenuta in $p\,b$, sicchè (art. 23) A' è numerabile, e $A^{(\Omega)}$ è nullo (art. 72) contro l'ipotesi.

Dopo ciò, tenuto conto che $A^{(\Omega)}$ è chiuso (articolo 68), per stabilire il teorema basterà dimostrare che esso è concentrato, ossia che ogni suo punto è un suo punto limite. Sia q un punto di $A^{(\Omega)}$ che non sia un suo punto limite; potrà assegnarsi un intorno ε di q non contenente, oltre q stesso, alcun altro punto di $A^{(\Omega)}$. Se C è la parte di A contenuta in ε, $C^{(\Omega)}$ sarà la parte di $A^{(\Omega)}$ contenuta in ε, cioè si ridurrà al solo punto q, il che fu dimostrato impossibile.

74. *Se A è un aggregato qualunque, l'aggregato $R = A' - A^{(\Omega)}$ è numerabile.*

Poichè $A^{(\Omega)}$ è perfetto (art. 73), ed R non ha punti comuni con esso, nessun punto di R potrà essere punto limite di $A^{(\Omega)}$, cioè per ogni punto di R potrà determinarsi un intorno del punto stesso non contenente alcun punto di $A^{(\Omega)}$. La parte dell'intervallo $a\,b$, in cui s'imagina contenuto A, ricoperta (una, più od infinite volte) da quegli intorni, consterà d'un insieme, finito o numerabile (art. 38), d'intervalli parziali tra loro separati. Denotiamo questi intervalli con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, e le parti di R in essi rispettivamente contenute con $R_1, R_2, \ldots$ Poichè R è compreso in A', $R^{(\Omega)}$, e quindi cia-

scuno degli $R_n^{(\Omega)}$, sarà compreso in $A^{(\Omega)}$; ma ε_n non racchiude alcun punto di $A^{(\Omega)}$, quindi $R_n^{(\Omega)} = 0$, ed R_n (art. 72), e per conseguenza (art. 24) R, è numerabile.

75. *Se A' non è numerabile, esiste un primo numero α della prima o della seconda classe tale che $A^{(\alpha)}$ è perfetto.*

Riprendiamo l'eguaglianza (art. 71):

$$A' = \sum_{\gamma<\Omega} (A^{(\gamma)} - A^{(\gamma+1)}) + A^{(\Omega)},$$

e confrontiamola coll'altra (art. 74):

$$A' = R + A^{(\Omega)}.$$

Ne deduciamo (v. nota all'art. 44):

$$R = \sum_{\gamma<\Omega} (A^{(\gamma)} - A^{(\gamma+1)}).$$

Se nessuno degli aggregati $A^{(\gamma)}$ fosse perfetto, nessuno degli aggregati $(A^{(\gamma)} - A^{(\gamma+1)})$ sarebbe nullo, e, poichè l'insieme dei termini della somma non è numerabile (art. 63), non lo sarebbe neppure R, mentre si sa che R è numerabile (articolo 74). Quindi esistono numeri γ per cui $A^{(\gamma)}$ è perfetto; e fra questi ve n'ha uno minimo (art. 65).

76. Dai teoremi degli articoli 71, 74, 75, tenuto conto di quello dell'art. 44, si hanno i seguenti:

Se A è un aggregato chiuso numerabile, esiste un primo numero α della prima o della seconda classe tale che $A^{(\alpha)} = 0$.

Se A è un aggregato chiuso non numerabile, esiste un primo numero α della prima o della se-

conda classe tale che $A^{(\alpha)}$ è perfetto, e l'aggregato $R = A - A^{(\alpha)}$ è numerabile.

E come corollario:

Un aggregato chiuso A può sempre scomporsi in due aggregati parziali R, S:

$$A = R + S,$$

di cui l'uno R numerabile, l'altro S perfetto. L'aggregato S è nullo sempre e soltanto se A è numerabile.

77. *Se A è un aggregato perfetto di punti d'una retta, il quale non è denso in alcun intervallo, può costruirsi un aggregato numerabile e concentrato avente A per derivato primo.*

Possiamo supporre A contenuto in un certo intervallo finito δ, l'insieme dei cui punti designeremo con I. Scrivendo:

$$A + B = I,$$

B denoterà l'insieme dei punti dell'intervallo δ che non appartengono all'aggregato A. Poichè pertanto A non ha alcun punto limite che non appartenga ad A stesso, per ogni punto di B si potrà determinare un intorno del punto medesimo non contenente alcun elemento di A. La parte dell'intervallo δ ricoperta (una, più od infinite volte) dall'insieme di tali intorni sarà costituita da un aggregato, necessariamente numerabile (articolo 38), d'intervalli parziali separati. Diciamo P l'insieme degli estremi di sinistra, Q quello degli estremi di destra di questi intervalli, e poniamo:

$$C = P + Q.$$

L'aggregato C, formato dalla riunione di due aggregati numerabili P, Q, è numerabile (art. 23).

Inoltre esso è concentrato. Sia infatti c un suo punto qualunque, γ un intorno qualunque di questo. L'intorno γ conterrà certamente punti di A, giacchè altrimenti c non sarebbe un estremo d'uno degli intervalli considerati; ma, non essendo A denso in alcuna parte di δ, γ dovrà contenere anche punti non appartenenti ad A. Ne segue che entro γ stanno di necessità punti di P e punti di Q, ossia punti di C, e quindi che ogni punto di C è punto limite di C stesso, sicchè C è concentrato.

Si consideri ora un punto di C'; in ogni suo intorno vi saranno punti di C, e quindi, per ciò che si disse poc'anzi, punti di A, sicchè i punti di C' sono punti limiti di A, e però — essendo A perfetto — appartengono ad A stesso. Reciprocamente, non essendo A denso in alcuna parte di δ, in ogni intorno d'un suo punto qualunque giaceranno punti di B, e quindi punti di C, sicchè ogni punto di A appartiene a C'.

Ne segue $A = C'$, e l'aggregato C soddisfa a tutte le condizioni del teorema.

78. *Ogni aggregato perfetto lineare* (cioè composto di punti d'una retta) *ha la potenza del continuo.*

Sia A un aggregato perfetto di punti d'un segmento δ. Se esso è denso in una parte ε di δ (od anche in tutto δ), esso conterrà tutti i punti di ε; infatti tutti questi punti sono suoi punti limiti, e quindi, essendo A perfetto, devono appartenere ad esso. La potenza di A sarà dunque (art. 22) $\geqq$ di quella dell'insieme dei punti di ε; ma questa (ar-

ticolo 32) è eguale a quella dell'insieme dei punti di δ, la quale, a sua volta (art. 22), è $\geqq$ di quella di A. Ne segue che A ha la potenza del continuo.

Supponiamo ora che A non sia denso in alcuna parte di δ. Potrà costruirsi (art. 77) un aggregato C numerabile e concentrato avente per derivato A; non potendo C essere chiuso (art. 40), A conterrà altri punti oltre quelli di C, e potrà scriversi:

$$A = C + D,$$

dove l'aggregato D non è certamente nullo. Diciamo I l'insieme degli intervalli, di cui gli estremi sono i punti di C.

Fra due qualunque di tali intervalli sono compresi altri intervalli dell'insieme I; infatti, se ciò non fosse, in qualunque parte del tratto compreso fra i due intervalli considerati giacerebbero punti di A, e però A sarebbe denso in quel tratto, ciò che è escluso. Disponiamo ora gli intervalli dell'insieme I in ordine di grandezza decrescente (cfr. art. 38):

$$I = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots),$$

e sopra un segmento qualunque σ prendiamo un aggregato di punti:

$$L = (l_1, l_2, \ldots),$$

numerabile, denso in tutto il segmento σ e non contenente gli estremi di esso. Noi potremo stabilire fra gli elementi dei due aggregati I, L una corrispondenza biunivoca completa e tale che, se un intervallo ε si trova alla destra di un altro nel

segmento δ, il punto corrispondente al primo si trovi alla destra del punto corrispondente al secondo nel segmento σ. A tal uopo si faccia anzitutto corrispondere all'intervallo ε_1 il punto l_1, che diremo anche p_1. In L esistono certamente punti che si trovano rispetto ad l_1 nella stessa posizione relativa in cui si trova ε_2 rispetto ad ε_1; sia l_{r_2} quello tra essi che ha indice minimo, designiamolo con p_2 e consideriamolo come omologo ad ε_2. Così proseguendo, si vede che a ciascun segmento ε_i corrisponde uno ed un solo punto l_{r_i} ossia p_i. È facile vedere che dalla corrispondenza non resta escluso alcun punto l. Siansi infatti determinati i punti $p_1, p_2, \ldots, p_s$, e sia l_t il punto d'indice minimo fra i rimanenti punti l. Nell'insieme I esistono certamente intervalli che si trovano rispetto ad $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s$ nella stessa posizione relativa in cui si trova l_t rispetto a $p_1, p_2, \ldots, p_s$; quello tra essi che ha indice minimo avrà evidentemente per omologo in L il punto l_t.

Indichiamo con J l'insieme dei punti del segmento σ, e definiamo l'insieme M mediante la relazione:

$$J = L + M.$$

Sia m un punto di M. Preso un suo intorno a sinistra, in questo giaceranno certamente punti dell'aggregato:

$$L = p_1, p_2, \ldots;$$

sia p_{h_1} quello tra essi che ha l'indice minimo. Prendiamo un nuovo intorno a sinistra di m, di lunghezza non maggiore di metà del precedente,

e non contenente p_{h_1}, e sia p_{h_2} quello tra i punti p in esso compresi che ha indice minimo; e così via. I punti $p_{h_1}, p_{h_2}, \ldots$ formeranno una successione ad indici crescenti, procedente da sinistra a destra, e avente per limite m. Pure da sinistra a destra procederanno gli intervalli omologhi $\varepsilon_{h_1}, \varepsilon_{h_2}, \ldots$, e quindi — essendo decrescente la loro grandezza perchè gl'indici crescono — essi si avvicineranno indefinitamente ad un certo punto n, il quale apparterrà ad A, perchè in ogni suo intorno stanno punti di C, e quindi di A. Può dimostrarsi però che esso non appartiene a C. Infatti, se esso fosse un estremo (necessariamente di sinistra) d'un intervallo ε_k, il punto p_k corrispondente ad ε_k in σ dovrebbe trovarsi a destra di tutti i punti $p_{h_1}, p_{h_2}, \ldots$, e non potendo esso coincidere con m, perchè questo non appartiene ad L, dovrebbe stare a destra di m. Detto pertanto p_s uno qualunque dei punti p compresi fra m e p_k, ε_s dovrebbe essere a destra di tutti gli intervalli $\varepsilon_{h_1}, \varepsilon_{h_2}, \ldots$, e a sinistra di ε_k, ossia a sinistra del punto n; ma ciò è impossibile, perchè, preso un intorno a sinistra di n di ampiezza minore di ε_s, in esso stanno certamente intervalli ε_{h_i}. Dunque il punto n appartiene all'aggregato D.

Tenendo fisso il punto m e prendendo in modo diverso la successione $p_{h_1}, p_{h_2}, \ldots$, si otterrà una successione $\varepsilon_{h_1}, \varepsilon_{h_2}, \ldots$ di intervalli diversi da quelli di prima. Il limite n però non muterà; giacchè ogni intervallo ε che sta alla destra di tutti quelli della prima successione deve stare del pari alla destra di tutti quelli della seconda, e viceversa.

Si possono invertire le considerazioni precedenti, partendo da un punto n di D per giungere ad uno m di M.

Con ciò si è stabilita una corrispondenza biunivoca completa fra gli aggregati D ed M; sicchè si ha:

$$D \sim M.$$

D'altra parte, essendo C ed L numerabili, A (art. 40) e J (art. 30) non numerabili, si ha (articolo 26):

$$A \sim D, \qquad J \sim M.$$

Ne segue:

$$A \sim J \sim T.$$

79. *Ogni aggregato lineare chiuso, o è numerabile, o ha la potenza del continuo.* *

Si è trovato per un aggregato chiuso qualunque (art. 76):

$$A = R + S,$$

dove R è numerabile ed S è perfetto. Se S è nullo, si ha:

$$A = R \sim N;$$

se S è perfetto, si ha (art. 26):

$$A \sim S \sim T.$$

* Cantor ha affermato ripetutamente che questo teorema sussiste per tutti gli aggregati lineari, ma una dimostrazione rigorosa di ciò non fu ancora data. Quella di P. Tannery (*Note sur la théorie des ensembles*, Bull. de la Société math. de France, T. XII, 1884, pag. 90-96) è imperfetta.

80. *Ogni aggregato perfetto di punti posti in uno spazio ad un numero qualunque n di dimensioni ha la potenza del continuo.*

Supporremo per semplicità $n = 2$; e imagineremo di più i punti dell'aggregato perfetto A posti entro il quadrato avente per due lati contigui i segmenti $\overline{01}$ di due assi coordinati ortogonali. Diremo:

B l'insieme dei punti del quadrato,

B_1 l'insieme dei punti di B aventi ambe le coordinate irrazionali,

B_2 l'insieme dei punti di B aventi una sola coordinata irrazionale,

B_3 l'insieme dei punti di B aventi ambe le coordinate razionali,

A_1, A_2, A_3 le parti di A contenute rispettivamente in B_1, B_2, B_3.

Inoltre, fissata sopra una retta qualunque una origine, e preso su di essa il segmento $\overline{01}$, diremo:

C l'insieme dei punti del segmento,

C_1 l'insieme dei punti di C aventi ascissa irrazionale,

C_2 l'insieme dei punti di C aventi ascissa razionale.

Fra i punti c_t di C_1 e quelli b_{u_1,u_2} di B_1 può stabilirsi una corrispondenza biunivoca completa come all'art. 36. Diciamo E l'insieme dei punti di C_1 omologhi a quelli di A_1, E_1 l'insieme dei punti di E' che appartengono a C_1, E_2 l'insieme di quelli che appartengono a C_2, sicchè:

$$E' = E_1 + E_2.$$

Sia c_r un punto di E_1, e poniamo, colla notazione dell'art. 36:

$$r = (\rho_1, \rho_2, \ldots);$$

poichè esso è punto limite di E, per ciascun valore di k da 1 in avanti potrà trovarsi in E un punto c_t tale che i primi $2k$ termini dello sviluppo:

$$t = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$$

coincidano con quelli di r; tali punti formeranno una successione avente per limite c_r. I punti omologhi in B_1 formano una successione tale, che i primi k termini dello sviluppo in frazione continua delle coordinate del punto k-esimo della successione coincidono con quelli di tutti i successivi. Ne segue che anche tale successione ammette un limite, il quale è un punto b_{s_1,s_2} a coordinate irrazionali, e quindi appartiene a B_1. Di più, siccome i punti della successione di cui b_{s_1,s_2} è il limite, come omologhi di punti dell'aggregato E, appartengono ad A_1, e quindi ad A, e siccome questo è perfetto, il punto b_{s_1,s_2} apparterrà ad A, e, per essere le sue coordinate irrazionali, ad A_1; ed il suo omologo c_r in C_1 apparterrà ad E. Dunque ogni punto di E_1 appartiene ad E, o, in altri termini, tutti i punti di E' che non appartengono ad E hanno ascissa razionale; ne segue (colla notazione stabilita nell'art. 42) che l'aggregato:

$$E' - D(E, E')$$

è numerabile o finito (art. 22, 27). D'altra parte l'aggregato:

$$E - D(E, E'),$$

essendo isolato, è numerabile o finito (art. 41). Ne segue:

$$E' - D(E, E') \sim E - D(E, E'),$$

e quindi:

$$E' \sim E.$$

Ma E', (art. 7) essendo un aggregato chiuso, o è numerabile o ha la potenza del continuo (articolo 79); quindi lo stesso potrà dirsi di E, e parimenti di A_1 che è equivalente ad E.

Consideriamo ora la parte F di A_2 posta sopra la retta $x = v$, dove v è un numero razionale compreso fra 0 ed 1. I punti di F avranno ordinata irrazionale; e, se un punto di F' ha ordinata irrazionale, esso, per essere A perfetto, dovrà far parte di A, e quindi di F. Ne segue, come poc'anzi, che:

$$F' - D(F, F')$$

consta di punti ad ordinata razionale, e quindi è numerabile; e se ne conclude, collo stesso ragionamento di prima, che F o è numerabile o ha la potenza del continuo. E poichè a ciascun valore razionale dell'ascissa o dell'ordinata corrisponde un aggregato come F, e la riunione di tali aggregati forma A_2, può concludersi (art. 24, 37) che A_2, o è numerabile, o ha la potenza del continuo.

Infine A_3 (art. 33) è numerabile.

Dunque A, o è numerabile, o ha la potenza del continuo.

Ma A, essendo perfetto, non può essere numerabile (art. 40); quindi esso ha la potenza del continuo.

81. Di qui può dedursi come prima che:

Ogni aggregato chiuso di punti posti in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, o è numerabile, o ha la potenza del continuo.

PARTE SECONDA.

TEORIA GENERALE DELLE FUNZIONI ANALITICHE. *

Funzioni dei punti d'un campo.

82. Se a ciascun punto d'un campo ad un numero qualunque di dimensioni si assegna come corrispondente un unico valore, reale o complesso, si dice che l'insieme di questi valori costituisce una *funzione dei punti del campo.* Si dice che la funzione è *reale*, se tutti i valori di cui consta sono reali.

Noi cercheremo di estendere alle funzioni dei punti d'un campo alcune definizioni e proprietà relative alle funzioni ordinarie, riferendoci per lo più ad un campo a due dimensioni. **

83. Dicesi *limite superiore (inferiore)* d'una funzione reale dei punti d'un campo un numero

---

* Opere da consultarsi: Bianchi 12, Biermann 13, 14, Borel 16, 17, Forsyth 54, Harkness e Morley 73, Hermite 74, Petersen 139, Pincherle 151, 153, Puzyna 177, Tannery e Molk 194, Thomae 198. — V. anche: Hurwitz 82.

** Per maggiori particolari v. il mio *Corso di calcolo infinitesimale* già citato.

tale, che nessun valore della funzione è maggiore (minore) di esso, ma che, presa ad arbitrio una quantità positiva σ, esistono valori della funzione che differiscono da esso per meno di σ.

Il limite superiore (inferiore) esiste sempre, ed è unico.

Il limite superiore (inferiore) si dice anche *massimo (minimo)*, quando esso è uno dei valori che prende la funzione.

Se si ha una funzione, reale o no, dei punti di un campo, e, presi due punti qualunque di esso, si fa la differenza dei valori corrispondenti della funzione, l'insieme dei valori assoluti delle quantità così ottenute ammette un limite superiore, che dicesi *oscillazione* della funzione in quel campo.

Per una funzione reale l'oscillazione è eguale alla differenza tra il suo limite superiore e il suo limite inferiore.

Se L è il limite superiore, l il limite inferiore d'una funzione reale dei punti d'un campo, esiste nel campo almeno un punto tale che in ogni suo intorno il limite superiore della funzione è L, ed un altro punto tale che in ogni suo intorno il limite inferiore è l.

84. Una funzione $f(x)$ dei punti x d'un campo dicesi *continua* in un punto c, se, presa comunque una quantità positiva σ, può trovarsi un intorno di c per tutti i punti x del quale sia:

$$|f(x) - f(c)| < \sigma.$$

A questa definizione è equivalente l'altra:

Una funzione reale dicesi continua in un punto c, se, presa comunque la quantità positiva σ, può

trovarsi un intorno di c nel quale l'oscillazione sia minore di σ.

Per le funzioni continue dei punti d'un campo possono dimostrarsi i seguenti teoremi:

I moduli dei valori d'una funzione continua costituiscono una funzione continua (reale).

Se una funzione è continua in tutto un campo, presa una quantità positiva qualunque σ, può trovarsi una certa quantità r tale, che l'oscillazione della funzione in ogni cerchio di raggio r contenuto nel campo sia minore di σ (teorema della continuità uniforme).

Se una funzione reale è continua in tutto un campo, ed L, l sono i suoi limiti superiore ed inferiore, esiste almeno un punto in cui essa prende il valore L, ed un altro in cui essa prende il valore l. — Più brevemente: *Una funzione reale continua in un campo ammette in esso un massimo ed un minimo.*

Una funzione reale continua in un campo assume in esso qualunque valore compreso fra il suo massimo ed il suo minimo.

La somma ed il prodotto di più funzioni continue in un punto sono funzioni continue in quel punto.

Il quoziente di due funzioni continue in un punto, delle quali la funzione divisore non è nulla in quel punto, è una funzione continua nel punto stesso.

Se una serie di funzioni continue in un punto è equiconvergente in un intorno di esso, la somma della serie è una funzione continua in quel punto.

Serie di potenze.

85. Abbandonando ora lo studio delle funzioni più generali dei punti d'un campo, noi cominceremo ad attribuire ai punti del piano un significato aritmetico, e ci occuperemo di quelle funzioni, il cui valore in un punto si ottiene eseguendo operazioni aritmetiche sul valore rappresentato dal punto stesso. Le funzioni di questa natura possono dirsi *espressioni aritmetiche*. Noi considereremo d'ora innanzi il piano come l'imagine dell'insieme di tutti i numeri complessi.

Le più semplici espressioni aritmetiche sono quelle ottenute combinando la variabile complessa x rappresentata dai punti del piano con altri valori numerici costanti, reali o complessi, mediante addizione, sottrazione e moltiplicazione. Tali espressioni hanno il nome di *polinomi*, e il loro studio è di spettanza dell'Algebra elementare.

La più ovvia generalizzazione dei polinomi si ottiene supponendo che in un polinomio ordinato secondo le potenze crescenti della variabile il numero dei termini cresca oltre ogni limite. Si ha così una serie, i cui termini contengono potenze intere, positive e crescenti della variabile, o, come si dice più brevemente, una *serie di potenze*.

86. Abbiasi la serie di potenze:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h , \qquad (1)$$

e si ponga:

$$|a_h| = \alpha_h, \qquad |x| = \xi.$$

Si possono dividere tutti i numeri reali e positivi in due classi A, B, secondochè essi, posti in luogo di ξ nella serie a termini reali e positivi:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \xi^h, \tag{2}$$

la rendono convergente o divergente. È chiaro che, se un numero appartiene alla classe A (o B), ogni numero minore (maggiore) di esso appartiene alla stessa classe. Esiste quindi un unico numero ρ, non minore di alcuno dei numeri della classe A nè maggiore di alcuno di quelli della classe B, cioè avente la proprietà, che per ogni $\xi < \rho$ la serie (2) è convergente, per ogni $\xi > \rho$ essa è divergente. A quale delle due classi A, B appartenga il numero ρ, se cioè per $\xi = \rho$ la serie (2) sia convergente o divergente, non può decidersi in generale.

Alla classe A appartiene in tutti i casi il numero 0, giacchè per $\xi = 0$ la (2) si riduce al suo primo termine. Se essa non contiene alcun altro numero, allora $\rho = 0$. Può avvenire invece che tutti i numeri reali e positivi appartengano alla classe A; allora si suol porre $\rho = \infty$.

Se, facendo centro nell'origine, si descrive un cerchio di raggio ρ, per tutti i punti interni ad esso si ha $|x| = \xi < \rho$, per modo che la serie (2) è convergente, e quindi la serie (1) è assolutamente convergente; invece per tutti i punti

esterni $|x| = \xi > \rho$, sicchè la serie (2) è divergente, e la (1) non è assolutamente convergente. Pei punti della circonferenza non si può dir nulla in generale.

Il numero ρ dicesi *raggio di convergenza,* e il cerchio di raggio ρ col centro nell'origine *cerchio di convergenza* della serie (1).

Esempi:

$1 + x + x^2 + \ldots$ ha raggio di convergenza 1;

$1 + 1!x + 2!x^2 + \ldots$ „ „ 0;

$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ „ „ ∞.

87. *Nei punti esterni al suo cerchio di convergenza una serie di potenze non è convergente neppure semplicemente.*

Supponiamo che, per un valore di x tale che $|x| = \xi > \rho$, la serie sia convergente; dovrà essere allora:

$$\lim_{h=\infty} a_h x^h = 0,$$

e quindi:

$$\lim_{h=\infty} \alpha_h \xi^h = 0.$$

Ciò vuol dire che, presa una quantità positiva arbitrariamente piccola σ, può trovarsi un numero n tale, che per ogni $h > n$ sia:

$$\alpha_h \xi^h < \sigma.$$

Se dunque η è una quantità compresa fra ρ e

ξ, sarà:

$$\alpha_h \eta^h < \sigma \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^h,$$

e quindi:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \alpha_h \eta^h < \sigma \sum_{h=n+1}^{\infty} \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^h = \sigma \frac{\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\eta}{\xi}},$$

onde la serie $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \eta^h$ sarebbe convergente, mentre, per essere $\eta > \rho$, essa è divergente. Dunque l'ipotesi fatta non può aver luogo.

88. *Una serie di potenze è equiconvergente in qualunque cerchio avente il centro nell'origine e raggio minore del raggio di convergenza.*

Sia ρ il raggio di convergenza della serie, ρ' un numero positivo qualunque minore di ρ. Poichè per $\xi = \rho'$ la serie $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \xi^h$ è convergente, presa una quantità positiva σ ad arbitrio, potrà determinarsi un numero n tale che sia:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \alpha_h \rho'^h < \sigma.$$

Ne segue per ogni $\xi \leq \rho'$:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \alpha_h \xi^h \leq \sum_{h=n+1}^{\infty} \alpha_h \rho'^h < \sigma,$$

e quindi per ogni punto x del cerchio di raggio ρ' col centro nell'origine (il contorno incluso):

$$\left| \sum_{h=n+1}^{\infty} a_h x^h \right| < \sigma,$$

ciò che prova l'asserto.

89. Osservando che, pei teoremi dell'art. 84, x^h è funzione continua di x, si ha, in virtù d'un teorema dello stesso articolo:

Una serie di potenze è una funzione continua in ogni cerchio col centro nell'origine di raggio minore del suo raggio di convergenza.

Ora, se si ha un campo qualunque interno al cerchio di convergenza (cioè di cui tutti i punti, compreso il contorno, appartengano al cerchio di convergenza ma non al contorno di esso), può sempre tracciarsi un cerchio, avente il centro nell'origine e raggio minore del raggio di convergenza, che lo contenga completamente. Ne segue pertanto:

Una serie di potenze è una funzione continua in qualunque campo interno al suo cerchio di convergenza. O più brevemente: *Una serie di potenze è una funzione continua nell'interno del suo cerchio di convergenza.*

90. Il raggio di convergenza d'una serie di potenze è evidentemente funzione dei coefficienti di essa; ma lo studio di tale funzione presenta gravissime difficoltà, ed è ancora quasi tutto da farsi.

Una relazione notevole tra i coefficienti d'una serie di potenze e il suo raggio di convergenza

è data dal teorema seguente: *

Se $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ *è una serie di potenze, e* $\alpha_h = |a_h|$, *l'elemento massimo* ** λ *dell'insieme derivato dell'insieme di valori reali e positivi:*

$$\alpha_1, \sqrt{\alpha_2}, \sqrt{\alpha_3}, \ldots, \sqrt[h]{\alpha_h}, \ldots \tag{1}$$

è il valor reciproco del raggio di convergenza della serie.

Il numero λ può anche definirsi come *l'elemento di separazione tra i numeri tali che nell'insieme* (1) *esistono infiniti elementi maggiori di essi e quelli non aventi tale proprietà.*

Prendiamo un valore $\xi < \frac{1}{\lambda}$; sarà $\frac{1}{\xi} > \lambda$, e, indicando con μ un numero compreso tra $\frac{1}{\xi}$ e λ, potrà scriversi:

$$\lambda < \mu = \frac{\theta}{\xi},$$

dove $0 < \theta < 1$. Per la definizione di λ, esisterà solo un numero finito d'elementi dell'insieme (1)

* Hadamard 64, 67. — Pringsheim (*Encyklop. d. math. Wissenschaften*, T. I, Leipzig, 1898, pag. 81) osserva, che il teorema era già stato prima scoperto da Cauchy, e che poi era andato in dimenticanza, sicchè ora porta il nome di Hadamard.

** Si noti che un aggregato chiuso di numeri reali ammette sempre un elemento massimo ed un elemento minimo.

maggiori di μ; detto n il più grande fra gli indici di tali elementi, per ogni $h > n$ si avrà:

$$\sqrt[h]{\alpha_h} < \mu = \frac{\theta}{\xi},$$

da cui:

$$\alpha_h \xi^h < \theta^h,$$

e sommando:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \alpha_h \xi^h < \sum_{h=n+1}^{\infty} \theta^h = \frac{\theta^{n+1}}{1-\theta}.$$

Ne segue che pel valore considerato di ξ la serie $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \xi^h$ è convergente.

Prendiamo ora $\xi > \frac{1}{\lambda}$, ossia $\frac{1}{\xi} < \lambda$. Vi saranno nell'insieme (1) infiniti elementi maggiori di $\frac{1}{\xi}$, cioè si avrà, per infiniti valori di h:

$$\sqrt[h]{\alpha_h} > \frac{1}{\xi},$$

da cui:

$$\alpha_h \xi^h > 1.$$

Ne segue che pel valore considerato la serie $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \xi^h$ è divergente.

Dunque $\frac{1}{\lambda}$ è il raggio di convergenza della serie proposta.

91. Dal teorema precedente possono trarsi molte conseguenze: ne esporremo alcune in questo articolo.

Se, al crescere indefinitamente di h, $\frac{\alpha_{h+1}}{\alpha_h}$ *tende ad un limite determinato* λ, *il valor reciproco di questo limite è il raggio di convergenza della serie.*

È noto * che, se $\frac{\alpha_{h+1}}{\alpha_h}$ tende ad un limite, allo stesso limite tende $\sqrt[h]{\alpha_h}$. Nel caso considerato l'insieme derivato dell'insieme dei valori $\sqrt[h]{\alpha_h}$ consta del solo valore λ, e quindi il raggio di convergenza è $\frac{1}{\lambda}$.

Se il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ *è* ρ, *e quello della serie* $\sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$ *è* ρ', *quello della serie* $\sum_{h=0}^{\infty} a_h b_h x^h$ *è* $\geqq \rho\rho'$. **

Poniamo $|a_h| = \alpha_h$, $|b_h| = \beta_h$. Preso un numero qualunque $\mu'' > \frac{1}{\rho\rho'}$, scomponiamolo in due fattori μ, μ' tali che sia $\mu > \frac{1}{\rho}$, $\mu' > \frac{1}{\rho'}$, ciò che può farsi in infiniti modi. Si potranno poi deter-

---

* V. p. es. Cesàro, *Corso di analisi algebrica*, Torino, 1894, pag. 100.

** Hadamard 70, 71, 72. — V. anche Jensen 83, Meyer, 109.

minare (art. 90) due numeri n, n' tali, che per ogni $h > n$ sia $\sqrt[h]{\alpha_h} < \mu$ e per ogni $h > n'$ sia $\sqrt[h]{\beta_h} < \mu'$; indicando allora con n'' un numero non minore di alcuno dei due numeri n, n', per ogni $h > n''$ sarà $\sqrt[h]{\alpha_h \beta_h} < \mu \mu' = \mu''$. Ne segue, indicando con ρ'' il raggio di convergenza della serie $\sum_{h=0}^{\infty} a_h b_h x^h$, che dev'essere $\mu'' \geqq \frac{1}{\rho''}$ ogniqualvolta $\mu'' > \frac{1}{\rho \rho'}$, e quindi $\frac{1}{\rho \rho'} \geqq \frac{1}{\rho''}$, ossia $\rho'' \geqq \rho \rho'$.

92. Esponiamo qui, per ragione di analogia, il teorema seguente:

Se il raggio di convergenza della serie $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x_h$ *è* ρ, *e quello della serie* $\sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$ *è* ρ', *quello della serie* $\sum_{h=0}^{\infty} (a_h + b_h) x^h$ *è eguale al più piccolo dei numeri* ρ, ρ', *se essi sono diversi, è eguale invece* ALMENO *al loro valore comune, se essi sono eguali.*

Infatti, supposto $\rho > \rho'$, per $|x| < \rho'$ le due serie sono convergenti quindi lo è anche la terza, invece per $\rho > |x| > \rho'$ la prima serie è convergente e la seconda non lo è, sicchè non lo è neppure la terza; ciò che prova che il raggio di convergenza della terza serie è precisamente ρ'.

Al contrario, se $\rho = \rho'$, per $|x| < \rho$ la terza serie è convergente, ma del suo modo di comportarsi per $|x| > \rho$ nulla può dirsi in generale; sicchè si può soltanto asserire che il suo raggio di convergenza non è minore di ρ.

93. La questione della dipendenza del raggio di convergenza dai coefficienti può considerarsi sotto un altro punto di vista. Supposto cioè i coefficienti funzioni di natura determinata d'una nuova variabile y, si può studiare il raggio di convergenza ρ come funzione di y. Ma, anche in questo indirizzo, pochi sono i risultati finora ottenuti. * Essi mostrano però che, anche nel caso più semplice in cui i coefficienti sono funzioni razionali intere di y, ρ è in generale una funzione discontinua di y.

P. es. può costruirsi una serie di potenze, i cui coefficienti sieno polinomi in y, e il cui raggio di convergenza abbia un certo valore R per tutti i valori di y, tranne un numero finito n di valori $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pei quali esso ha un altro valore $R' > R$. Infatti, se le serie di potenze $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$, $\sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$ hanno rispettivamente i raggi di convergenza R, R', e se si pone:

$$(y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_n) = \varphi(y),$$

la serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} [b_h + a_h \varphi(y)] x^h$$

ha (art. 92) la proprietà voluta.

Più generalmente, se:

$$R = f(y), \qquad R' = g(y)$$

* Pincherle 157, Vivanti 211, 212.

sono i raggi di convergenza delle serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h(y)\, x^h\,, \qquad \sum_{h=0}^{\infty} b_h(y)\, x^h\,,$$

la serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} [b_h(y) + a_h(y)\, \varphi(y)]\, x^h$$

ha raggio di convergenza $f(y)$ per tutti i valori y per cui $f(y) < g(y)$ e $\varphi(y) \neq 0$, raggio di convergenza $g(y)$ per tutti gli altri.

Può invece dimostrarsi il teorema seguente:

Se i coefficienti d'una serie di potenze:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h(y)\, x^h$$

sono polinomi di grado non superiore ad un certo numero p, e se per $p+1$ valori $y_0, y_1, \ldots, y_p$ di y la serie ha raggio di convergenza maggiore o eguale ad un certo numero R, la stessa cosa ha luogo per tutti gli altri valori di y.

Poniamo:

$$a_h(y) = c_{h0} + c_{h1}\, y + c_{h2}\, y^2 + \ldots + c_{hp}\, y^p\,,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & y_0 & y_0^2 & \ldots & y_0^p \\ 1 & y_1 & y_1^2 & \ldots & y_1^p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & y_p & y_p^2 & \ldots & y_p^p \end{vmatrix} = D,$$

e denotiamo con D_{ik} i complementi algebrici degli

elementi del determinante D. Poichè per ipotesi le serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h(y_i)\, x^h \qquad (i = 0,\ 1, \ldots, p)$$

hanno raggio di convergenza $\geqq R$, lo stesso avrà luogo (art. 92) per le serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} [D_{1k}\, a_h(y_0) + D_{2k}\, a_h(y_1) + \ldots + D_{p+1.k}\, a_h(y_p)]\, x^h \qquad (k = 1,\ 2, \ldots, p+1),$$

ossia:

$$D \sum_{h=0}^{\infty} c_{h,k-1}\, x^h \qquad (k = 1,\ 2, \ldots, p+1),$$

e quindi (lasciando da parte il fattore D) anche (art. 92) per la serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} (c_{h0} + c_{h1}\, y + \ldots + c_{hp}\, y^p)\, x^h,$$

ossia:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h(y)\, x^h,$$

dove y può avere valore qualunque.

Per altri teoremi congeneri possono consultarsi i lavori citati nell'ultima nota.

94. *Data una serie di potenze, può trovarsi un intorno dell' origine in nessun punto del quale,*

tranne tutt' al più l' origine stessa, la serie ha valore zero. *

Sia $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h = P(x)$ la serie di potenze considerata, e supponiamo dapprima $a_0 \neq 0$. Poichè $f(x)$ è funzione continua nell'interno del suo cerchio di convergenza (art. 89), potrà determinarsi un intorno dell'origine in tutti i punti x del quale sia:

$$| P(x) - P(0) | < | a_0 | ;$$

ma $P(0) = a_0$, quindi sarà in tutti i punti di quell'intorno $P(x) \neq 0$.

Sia invece $a_0 = 0$, e supponiamo inoltre, per generalità:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{r-1} = 0, \qquad a_r \neq 0.$$

Si avrà:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h = x^r \sum_{h=0}^{\infty} a_{r+h} x^h .$$

Ora, per ciò che si è detto, può trovarsi un intorno dell'origine in cui $\sum_{h=0}^{\infty} a_{r+h} x^h$ non è mai zero; in quest'intorno $P(x)$ si annullerà soltanto nell'origine.

95. Il teorema precedente può anche enunciarsi così:

---

* In questo teorema, come in altri che seguiranno, si suppone tacitamente che il raggio di convergenza non sia nullo, senza di che il teorema non avrebbe alcun senso.

Se una serie di potenze si annulla in un aggregato di punti avente per punto limite l'origine, essa è identicamente nulla (cioè sono nulli tutti i suoi coefficienti). *

---

* Segue da questo teorema che:

Una serie di potenze $P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ *non può avere valore reale (nè puramente imaginario) in tutti i punti d'un intorno dell'origine.*

Poniamo $a_h = b_h + i c_h$, e diamo ad x un valor reale; dovrà essere:

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h x^h = 0,$$

donde segue $c_h = 0$, sicchè i coefficienti a_h devono essere reali.

Dopo ciò diamo ad x un valore puramente imaginario iv; avremo:

$$P(iv) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h (iv)^h =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h a_{2h} v^{2h} + i \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h a_{2h+1} v^{2h+1}.$$

Poichè $P(iv)$ dev'essere reale per ogni v reale e di modulo minore di ρ, dove ρ è il raggio dell'intorno considerato, dovrà essere per tutti questi valori di v:

$$\sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h a_{2h+1} v^{2h+1} = 0,$$

donde segue, pel teorema del testo:

$$a_{2h+1} = 0 \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots),$$

e quindi, posto $x^2 = y$:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{2h} x^{2h} = Q(x^2) = Q(y).$$

La serie $Q(y)$ dovendo essere reale per ogni y di modulo minore di ρ^2, si troverà, ripetendo il ragionamento prece-

Di qui si hanno senza difficoltà i teoremi seguenti:

Data una serie di potenze, può trovarsi un intorno dell'origine in nessun punto del quale essa riprende il valore che ha nell'origine stessa.

Se una serie di potenze ha lo stesso valore in tutti i punti di un aggregato avente per punto limite l'origine, essa si riduce ad una costante (cioè tutti i suoi coefficienti sono nulli meno il primo).

Se due serie di potenze hanno valori tra loro eguali (anche se eventualmente diversi da punto a punto) *in tutti i punti di un aggregato avente per punto limite l'origine, le due serie sono identicamente eguali* (cioè i loro coefficienti omologhi sono eguali).

96. Le proprietà delle serie di potenze di x possono estendersi alle serie di potenze di $x - c$, dove c è un numero finito, purchè nei vari teoremi si sostituisca all'origine il punto c. Così per es. Una serie di potenze di $x - c$ converge entro un cerchio col centro in c; essa non può annullarsi in un insieme di punti avente per punto limite c senza essere identicamente nulla; e così via.

---

dente:

$$a_{2(2h+1)} = 0 \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots).$$

Così continuando, si dimostra che devono essere nulli i coefficienti i cui indici contengono al massimo la 2ª, 3ª,... potenza di 2; e quindi che tutti i coefficienti, tranne a_0, devono essere nulli, potendosi per ogni dato coefficiente assegnare la massima potenza di 2 contenuta nel suo indice.

Per vedere che cosa avvenga quando invece di un punto c a distanza finita si voglia considerare il punto all'infinito, facciamo nella serie $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$, avente il raggio di convergenza ρ, la trasformazione $x = \frac{1}{x'}$; essa diviene $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h}{x'^h}$, e questa serie converge per $|x'| > \rho'$, posto $\rho' = \frac{1}{\rho}$. Nel caso che si considera si ha dunque una serie di potenze di $\frac{1}{x}$, la quale converge nella parte del piano *esterna* ad una certa circonferenza col centro nell'origine.

Valor medio e sue applicazioni.

97. Sia $f(x)$ una funzione dei punti d'un campo C, la quale sia continua sopra una circonferenza di raggio ρ col centro nell'origine. Preso un numero qualunque n, si divida la circonferenza in 2^n parti eguali, a partire dal punto d'incontro di essa col semiasse positivo x. I punti di divisione rappresenteranno i valori:

$$\rho, \quad \alpha_n \rho, \quad \alpha_n^2 \rho, \ldots, \alpha_n^{2^n - 1} \rho$$

della variabile x, dove:

$$\alpha_n = e^{\frac{2\pi i}{2^n}}$$

è la radice imaginaria dell'unità d'ordine 2^n avente

argomento minimo, e indicando con $\mathbf{M}_n f(\rho)$ la media dei valori della funzione in quei punti, sarà:

$$\mathbf{M}_n f(\rho) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\alpha_n^k \rho\right).$$

Dimostreremo che, al tendere di n ad infinito, questa espressione tende ad un limite finito e determinato.

Si ha, posto $\alpha_{n+p} = e^{\frac{2\pi i}{2^{n+p}}}$:

$$\mathbf{M}_n f(\rho) = \frac{1}{2^{n+p}} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^p f\left(\alpha_n^k \rho\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+p}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{l=0}^{2^p-1} f\left(\alpha_n^k \rho\right), \qquad (1)$$

$$\mathbf{M}_{n+p} f(\rho) = \frac{1}{2^{n+p}} \sum_{k=0}^{2^{n+p}-1} f\left(\alpha_{n+p}^k \rho\right). \qquad (2)$$

Facciamo:

$$k = 2^p . q + r, \qquad (3)$$

dove q ed r denotano il quoziente ed il resto della divisione di k per 2^p. Dovendo nella (2) k variare da 0 a $2^{n+p} - 1$, si otterranno tutti i suoi valori dalla (3) facendo variare in essa q da 0 a $2^n - 1$ ed r da 0 a $2^p - 1$, sicchè la (2) potrà scriversi, tenuto anche conto che $\alpha_{n+p}^{2^p} = \alpha_n$:

$$\mathbf{M}_{n+p} f(\rho) = \frac{1}{2^{n+p}} \sum_{q=0}^{2^n-1} \sum_{r=0}^{2^p-1} f\left(\alpha_{n+p}^{2^p q+r} \rho\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+p}} \sum_{q=0}^{2^n-1} \sum_{r=0}^{2^p-1} f\left(\alpha_{n+p}^r \alpha_n^q \rho\right).$$

Sottraendo da questa la (1), si ha:

$$\mathbf{M}_{n+p} f(\rho) - \mathbf{M}_n f(\rho) =$$
$$= \frac{1}{2^{n+p}} \sum_{q=0}^{2^n-1} \sum_{r=0}^{2^p-1} \left[f\left(\alpha^r_{n+p} \alpha^q_n \rho\right) - f\left(\alpha^q_n \rho\right) \right].$$

Ora, poichè la $f(x)$ è continua, presa σ ad arbitrio, potrà trovarsi * una quantità θ tale che la oscillazione di $f(x)$ su ogni arco eguale o minore di θ sia minore di σ. Dopo ciò, scelto il numero n in modo che l'arco di ampiezza $\frac{2\pi}{2^n}$ sia minore di θ, ed osservando che l'arco compreso fra i due punti:

$$\alpha^q_n \quad \text{e} \quad \alpha^r_{n+p} \alpha^q_n \rho \quad (0 \leq r \leq 2^p - 1),$$

è di ampiezza $\frac{2\pi r}{2^{n+p}} < \frac{2\pi}{2^n}$, si ha:

$$\left| f\left(\alpha^r_{n+p} \alpha^q_n \rho\right) - f\left(\alpha^q_n \rho\right) \right| < \sigma,$$

e quindi:

$$| \mathbf{M}_{n+p} f(\rho) - \mathbf{M}_n f(\rho) | < \sigma,$$

relazione la quale mostra che, al tendere di n ad infinito, $\mathbf{M}_n f(\rho)$ tende ad un limite determinato e finito. Noi designeremo questo limite con $\mathbf{M} f(\rho)$:

$$\mathbf{M} f(\rho) = \lim_{n=\infty} \mathbf{M}_n f(\rho) = \lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\alpha^k_n \rho\right) \right],$$

---

* Pel teorema della continuità uniforme delle funzioni d'una variabile reale, il quale, come altri teoremi analoghi, può immediatamente estendersi alle funzioni dei punti di una linea qualunque.

e lo diremo *valor medio* * di $f(x)$ sulla circonferenza di raggio ρ.

La definizione di valor medio si applica in particolare ad ogni serie di potenze avente raggio di convergenza maggiore di ρ, giacchè (art. 89) una tale serie è una funzione continua in tutto l'interno del suo cerchio di convergenza, e quindi in particolare sulla circonferenza di raggio ρ considerata.

98. *Il modulo del valor medio d'una funzione sopra una circonferenza non supera il massimo valor assoluto della funzione sulla circonferenza stessa.*

Sia $M(\rho)$ il massimo valor assoluto della funzione $f(x)$ sopra la circonferenza di raggio ρ; sarà, per qualunque valore di n e di k:

$$\left| f\left(\alpha_n^k \rho\right) \right| \leq M(\rho),$$

quindi:

$$| \mathbf{M}_n f(\rho) | \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| f\left(\alpha_n^k \rho\right) \right| \leq M(\rho),$$

da cui, per un noto teorema sui limiti:

$$| \mathbf{M} f(\rho) | \leq M(\rho).$$

---

* Il *valor medio* fu introdotto da PRINGSHEIM 167, 172, 174 principalmente allo scopo di stabilire per via *elementare* il teorema di LAURENT (v. più innanzi), che fu dedotto in origine dalla teoria degli integrali curvilinei. Altre dimostrazioni elementari, ma assai meno semplici di quella di PRINGSHEIM, erano già state date precedentemente da MITTAG-LEFFLER 110, 111, 113 e da SCHEEFFER 184.

99. Si dimostrano assai facilmente i seguenti teoremi:

Il valor medio d'una costante è la costante stessa.

Il valor medio del prodotto d'una costante per una funzione è il prodotto della costante pel valor medio della funzione.

Il valor medio della somma di due o più funzioni è la somma dei loro valori medi.

100. *Se le infinite funzioni:*

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots$$

sono continue sulla circonferenza di raggio ρ *avente il centro nell'origine, e se* $\sum_{h=1}^{\infty} f_h(x)$ *è equiconvergente sulla circonferenza stessa, si ha:*

$$\mathbf{M} \sum_{h=1}^{\infty} f_h(\rho) = \sum_{h=1}^{\infty} \mathbf{M} f_h(\rho).$$

Presa m in modo che sia su tutta la circonferenza:

$$| R_m(x) | = \left| \sum_{h=m+1}^{\infty} f_h(x) \right| < \sigma,$$

dove σ è scelta ad arbitrio, e tenuto conto che, per un noto teorema, $\sum_{h=1}^{\infty} f_h(x)$ è funzione continua sulla circonferenza, si avrà (art. 98, 99):

$$\mathbf{M} \sum_{h=1}^{\infty} f_h(\rho) = \sum_{h=1}^{m} \mathbf{M} f_h(\rho) + \mathbf{M} R_m(\rho),$$

$$| \mathbf{M} R_m(\rho) | < \sigma,$$

da cui:

$$\mathbf{M} \sum_{h=1}^{\infty} f_h(\rho) = \lim_{m=\infty} \sum_{h=1}^{m} \mathbf{M} f_h(\rho) = \sum_{h=1}^{\infty} \mathbf{M} f_h(\rho).$$

101. Cerchiamo il valor medio d'una potenza intera della variabile, cioè facciamo:

$$f(x) = x^m,$$

dove m è un numero intero. Se m è nullo, si ha (art. 99):

$$\mathbf{M}(\rho^m) = 1.$$

Se $m \gtrless 0$, si ha:

$$\mathbf{M}_n(\rho^m) = \frac{\rho^m}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \alpha_n^{mk}.$$

Presa n tale che sia $2^n > |m|$, la somma del secondo membro, per una proprietà nota delle radici dell'unità, è nulla, sicchè da un certo valore di n in avanti $\mathbf{M}_n(\rho^m)$ è nullo; quindi:

$$\mathbf{M}(\rho^m) = 0 \quad \text{per} \quad m \gtrless 0.$$

102. Abbiasi ora una serie di potenze di x, $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$, ed una serie di potenze di $\frac{1}{x}$, $\sum_{h=1}^{\infty} b_h x^{-h}$, e sia la prima convergente entro un cerchio di raggio ρ_1, la seconda fuori (art. 96) d'un cerchio di raggio ρ_2, ambi col centro nell'origine.

Se $\rho_1 > \rho_2$, la somma:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h + \sum_{h=1}^{\infty} b_h x^{-h}$$

sarà una funzione continua entro la corona compresa fra le due circonferenze, e però il suo valor medio su ogni circonferenza di raggio ρ tale che $\rho_2 < \rho < \rho_1$ sarà finito e determinato.

Poniamo per tutti i valori positivi di h:

$$b_h = a_{-h},$$

sicchè potremo scrivere:

$$f(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h x^h .$$

Dopo ciò avremo (art. 100, 101):

$$\mathbf{M} f(\rho) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \mathbf{M}(a_h \rho^h) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h \mathbf{M} \rho^h = a_0,$$

risultato notevole, che ci mostra come il valor medio della $f(x)$ sia indipendente da ρ.

Anche $\frac{f(x)}{x^r}$ è una funzione continua nella corona considerata per qualunque valore positivo o negativo di r, e si ha:

$$\mathbf{M} \frac{f(\rho)}{\rho^r} = \mathbf{M} \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h \rho^{h-r} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h \mathbf{M} \rho^{h-r} = a_r.$$

Dunque per ogni valore positivo, nullo o negativo di r si ha:

$$\mathbf{M} \frac{f(\rho)}{\rho^r} = a_r.$$

103. Dalla formola trovata e dal teorema dell'art. 98 segue:

$$| a_r | \leq \frac{M}{\rho^r},$$

dove M denota il massimo valore assoluto di $f(x)$ sulla circonferenza di raggio ρ.

104. Vogliamo ora calcolare il valor medio sopra una circonferenza ρ della funzione:

$$\frac{x f(x)}{x - c},$$

dove $f(x)$ è una funzione continua sulla circonferenza stessa, e c è una quantità di modulo diverso da ρ.

Sia dapprima $|c| > \rho$. Si ha dall'Algebra, per $|x| = \rho$:

$$\frac{x}{x-c} = -\frac{x}{c}\frac{1}{1-\frac{x}{c}} = -\frac{x}{c}\left(1+\frac{x}{c}+\left(\frac{x}{c}\right)^2+\ldots\right) =$$

$$= -\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{x}{c}\right)^h,$$

che è una serie di potenze avente per raggio di convergenza $|c|$ e quindi equiconvergente sulla circonferenza ρ. Sarà perciò anche equiconvergente la serie:

$$\frac{x f(x)}{x - c} = -\sum_{h=1}^{\infty}\frac{x^h f(x)}{c^h},$$

e si avrà (art. 100):

$$\mathbf{M}\,\frac{\rho f(\rho)}{\rho - c} = -\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c^h}\,\mathbf{M}\,[\rho^h f(\rho)] \quad \text{per } |c| > \rho. \quad (1)$$

Sia ora $|c| < \rho$. Si ha per $|x| = \rho$:

$$\frac{x}{x-c} = \frac{1}{1-\frac{c}{x}} = 1 + \frac{c}{x} + \left(\frac{c}{x}\right)^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{c}{x}\right)^h,$$

e quindi come prima:

$$\mathbf{M}\,\frac{\rho f(\rho)}{\rho - c} = \sum_{h=0}^{\infty} c^h\,\mathbf{M}\left[\frac{1}{\rho^h} f(\rho)\right] \quad \text{per} \quad |c| < \rho. \quad (2)$$

Facendo nelle (1), (2) $f(x) = 1$, si ottiene (articolo 101):

$$\mathbf{M}\,\frac{\rho}{\rho - c} = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad |c| > \rho, \\ 1 & \text{per} \quad |c| < \rho. \end{cases} \quad (3)$$

105. *Abbiansi infinite serie di potenze positive e negative:*

$$f_k(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_{kh} x^h \quad (k = 1, 2, \ldots) \quad (1)$$

convergenti entro la corona compresa fra le circonferenze di raggi* ρ_1 *e* $\rho_2 < \rho_1$ *col centro nell'origine; se la serie:*

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} f_h(x) \quad (2)$$

è equiconvergente su ogni circonferenza col centro

* Cfr. art. 102.

nell'origine il cui raggio ρ *sia compreso fra* ρ_1 *e* ρ_2, *allora:*

a) Le somme dei coefficienti omologhi delle serie $f_k(x)$ *sono convergenti;*

b) Posto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kh} = A_h, \tag{3}$$

la serie:

$$G(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} A_h x^h \tag{4}$$

è convergente in tutti i punti interni della corona ed ha lo stesso valore di $F(x)$ *(lemma di Weierstrass).* *

Poichè le funzioni (1) sono (art. 89) continue sulla circonferenza di raggio ρ, e la serie (2) è equiconvergente su questa circonferenza, $F(x)$ sarà pure una funzione continua, e così $\frac{F(x)}{x^h}$ qualunque sia il numero intero h; e però $\mathbf{M}\frac{F(\rho)}{\rho^h}$ sarà una quantità determinata e finita. Ora (art. 100, 102):

$$\mathbf{M}\frac{F(\rho)}{\rho^h} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}\frac{f_k(\rho)}{\rho^h} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kh}, \tag{5}$$

sicchè la (3) è convergente.

---

* Weierstrass 216. Le condizioni del teorema sono sufficienti ma non necessarie, come ha mostrato Runge 181 con un esempio. Le condizioni necessarie e sufficienti furono poi stabilite da Arzelà 6.

Si prenda ora un valore qualunque ρ'_1 compreso fra ρ e ρ_1, ed un altro ρ'_2 compreso fra ρ_2 e ρ, e si denoti con M_1 il massimo valore assoluto di $F(x)$ sulla circonferenza di raggio ρ_1', con M_2 l'analogo per la circonferenza di raggio ρ_2'. Si avrà dalla (5) per tutti i valori di h (art. 98), tenuto conto della (3):

$$|A_h| = \left| \mathbf{M} \frac{F(\rho_1')}{\rho_1'^h} \right| \leq \frac{M_1}{\rho_1'^h},$$

quindi:

$$\sum_{h=0}^{\infty} |A_h| \rho^h \leq M_1 \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_1'}\right)^h = \frac{M_1 \rho_1'}{\rho_1' - \rho};$$

analogamente:

$$|A_h| = \left| \mathbf{M} \frac{F(\rho_2')}{\rho_2'^h} \right| \leq \frac{M_2}{\rho_2'^h},$$

quindi:

$$\sum_{h=-1}^{-\infty} |A_h| \rho^h \leq M_2 \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{\rho_2'}{\rho}\right)^h = \frac{M_2 \rho_2'}{\rho - \rho_2'}.$$

Sommando si ha:

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |A_h| \rho^h \leq \frac{M_1 \rho_1'}{\rho_1' - \rho} + \frac{M_2 \rho_2'}{\rho - \rho_2'}, \qquad (6)$$

sicchè la serie (4) è assolutamente convergente per ogni x di modulo compreso fra ρ_1 e ρ_2.

Poniamo:

$$\frac{\rho_1'}{\rho_1' - \rho} + \frac{\rho_2'}{\rho - \rho_2'} = \theta;$$

presa σ ad arbitrio, noi potremo, per la equiconvergenza della (2), determinare due numeri n_1, n_2 tali, che sulla circonferenza ρ_1' si abbia:

$$\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \frac{\sigma}{2\theta}$$

per ogni $N \geqq n_1$, e sulla circonferenza ρ'_2 si abbia la stessa relazione per ogni $N \geqq n_2$. Indicando allora con n un numero qualunque non minore di alcuno dei due numeri n_1, n_2, e ponendo:

$$F_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x),$$

si avrà per tutti i punti delle due circonferenze ρ_1', ρ_2':

$$| F_n(x) | < \frac{\sigma}{2\theta}.$$

Dopo ciò, se si ripete il ragionamento sopra esposto per la funzione $F_n(x)$, si giungerà ad una relazione come la (6) dove in luogo di M_1, M_2 figurerà $\frac{\sigma}{2\theta}$, e in luogo dei coefficienti A_h vi saranno i coefficienti:

$$A_h^{(n)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{kh}.$$

Si avrà cioè:

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} \left| A_h^{(n)} \right| \rho^h \leqq \frac{\sigma}{2},$$

e quindi, a maggior ragione:

$$\left| \sum_{h=-\infty}^{\infty} A_h^{(n)} x^h \right| \leqq \frac{\sigma}{2},$$

per $|x| = \rho$.

D'altra parte n può prendersi abbastanza grande perchè sulla circonferenza ρ sia:

$$|F_n(x)| < \frac{\sigma}{2};$$

ne segue per ogni $|x| = \rho$ e per ogni n da un certo valore in avanti:

$$\left| F_n(x) - \sum_{h=-\infty}^{\infty} A_h^{(n)} x^h \right| < \sigma. \qquad (7)$$

Ora:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + F_n(x),$$

e:

$$G(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{kh} x^h + \sum_{h=-\infty}^{\infty} A_h^{(n)} x^h,$$

ossia, poichè il primo termine del secondo membro è la somma d'un numero finito di serie:

$$G(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_{kh} x^h + \sum_{h=-\infty}^{\infty} A_h^{(n)} x^h =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + \sum_{h=-\infty}^{\infty} A_h^{(n)} x^h,$$

onde:

$$F(x) - G(x) = F_n(x) - \sum_{h=-\infty}^{\infty} A_h^{(n)} x^h,$$

e quindi per la (7), per $|x| = \rho$:

$$|F(x) - G(x)| < \sigma,$$

ossia, essendo σ arbitrario:

$$F(x) = G(x).$$

Derivata ed integrale d'una serie di potenze.

106. Dicesi *derivata* d'una serie di potenze:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$$

la serie:

$$P'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h\, a_h x^{h-1}$$

ottenuta moltiplicando ciascun termine per l'esponente di x che in esso figura e diminuendo l'esponente stesso di un'unità.

La derivata della derivata dicesi *derivata seconda*, e si denota con $P''(x)$; e così di seguito.

Dicesi *integrale* d'una serie di potenze:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$$

la serie:

$$\int P(x)\,d\,x = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h\,x^{h+1}}{h+1} + C$$

ottenuta aumentando ciascun esponente d'un'unità e dividendo il termine relativo per l'esponente così aumentato, ed aggiungendo poi una *costante arbitraria.*

La derivata dell'integrale d'una serie di potenze è la serie stessa.

107. *Una serie di potenze e la sua derivata hanno lo stesso raggio di convergenza.*

Sia ρ il raggio di convergenza della serie:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h\,x^h\,,$$

ρ' quello della sua derivata:

$$P'(x) = \frac{1}{x} \sum_{h=1}^{\infty} h\,a_h\,x^h\,.$$

È facile dimostrare, coi criteri dati dall'Algebra, che le serie:

$$\varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} h\,x^h\,, \qquad \psi(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^h}{h}$$

sono convergenti per $|\,x\,| < 1$, divergenti per $|\,x\,| > 1$, sicchè il loro raggio di convergenza è 1.

Dopo ciò, applicando il secondo teorema dell'art. 91, prima alle serie $P(x)$, $\varphi(x)$, poi alle serie $x\,P'(x)$, $\psi(x)$, troviamo:

$$\rho' \geqq \rho \times 1, \qquad \rho \geqq \rho' \times 1,$$

donde $\rho = \rho'$.

In virtù dell'ultima osservazione dell'art. precedente, il teorema può anche enunciarsi così:

Una serie di potenze e la sua serie integrale hanno lo stesso raggio di convergenza.

108. Dimostreremo in questo articolo e nei successivi, che le regole ordinarie di derivazione sussistono anche relativamente alla nostra definizione di derivata. *

La derivata d'una serie ridotta al solo termine costante è nulla.

Reciprocamente, *una serie identicamente nulla* (cioè di cui sono nulli tutti i coefficienti) *può considerarsi come la derivata d'una serie ridotta al solo termine costante, che del resto può avere qualunque valore.*

109. *La derivata della somma di due serie di potenze è la somma delle loro derivate.*

Abbiansi due serie di potenze:

$$P_1(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{1h}\, x^h, \qquad P_2(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{2h}\, x^h, \quad (1)$$

e pongasi:

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) = \sum_{h=0}^{\infty} [a_{1h} + a_{2h}]\, x^h.$$

Sarà:

$$P_1'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h\, a_{1h}\, x^{h-1}, \quad P_2'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h\, a_{2h}\, x^{h-1},$$

$$P'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h\, [a_{1h} + a_{2h}]\, x^{h-1},$$

* VIVANTI 207.

quindi:

$$P'(x) = P_1'(x) + P_2'(x).$$

110. *La derivata del prodotto:*

$$P(x) = P_1(x)\, P_2(x)$$

di due serie di potenze $P_1(x)$, $P_2(x)$ *è:*

$$P_1(x)\, P_2'(x) + P_1'(x)\, P_2(x).$$

Sieno le $P_1(x)$, $P_2(x)$ espresse dalle (1) dell'articolo prec. Si ha, per definizione, dall'Algebra:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h\, x^h,$$

dove:

$$c_h = \sum_{k=0}^{h} a_{1k}\, a_{2,h-k},$$

quindi:

$$P'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h\, c_h\, x^{h-1} = \sum_{h=1}^{\infty} \left[h\, x^{h-1} \sum_{k=0}^{h} a_{1k}\, a_{2,h-k} \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \left[x^{h-1} \sum_{k=0}^{h} (h-k)\, a_{1k}\, a_{2,h-k} \right] +$$

$$+ \sum_{h=1}^{\infty} \left[x^{h-1} \sum_{k=0}^{h} k\, a_{1k}\, a_{2,h-k} \right].$$

Ora:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left[x^{h-1} \sum_{k=0}^{h} (h-k)\, a_{1k}\, a_{2,h-k} \right] =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} a_{1h}\, x^h \,.\, \sum_{h=1}^{\infty} h\, a_{2h}\, x^{h-1} = P_1(x)\, P_2'(x),$$

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left[x^{h-1}\sum_{k=0}^{h} k\, a_{1k}\, a_{2,h-k}\right]=$$

$$=\sum_{h=1}^{\infty} h\, a_{1h}\, x^{h-1}\,.\sum_{h=0}^{\infty} a_{2h}\, x^h = P_1'(x)\, P_2(x),$$

sicchè il teorema risulta dimostrato.

111. *La derivata del prodotto di più serie di potenze si ottiene moltiplicando la derivata di ciascuna serie per tutte le altre e sommando i risultati.*

Poichè il teorema sussiste pel prodotto di 2 serie (art. 110), basterà dimostrarlo coll'induzione completa.

Sia:

$$R(x)=\sum_{h=0}^{\infty} c_h\, x^h = \prod_{r=1}^{n} P_r(x),$$

dove:

$$P_r(x)=\sum_{h=0}^{\infty} a_{rh}\, x^h \quad (r=1,\ 2,\ldots,n).$$

Posto:

$$\prod_{r=1}^{n-1} P_r(x)=Q(x),$$

si avrà:

$$R(x)=Q(x)\, P_n(x),$$

e quindi, poichè il teorema sussiste per $n=2$ e si ammette vero per $n-1$:

$$Q'(x)=P_1'(x)\, P_2(x)\, P_3(x)\ldots P_{n-1}(x)+$$
$$+P_1(x)\, P_2'(x)\, P_3(x)\ldots P_{n-1}(x)+\ldots$$
$$\ldots+P_1(x)\, P_2(x)\ldots P_{n-2}(x)\, P'_{n-1}(x),$$
$$R'(x)=Q(x)\, P'_n(x)+Q'(x)\, P_n(x),$$

donde segue:

$$R'(x) = P_1'(x)\, P_2(x)\, P_3(x) \ldots P_n(x) + \\ + P_1(x)\, P_2'(x)\, P_3(x) \ldots P_n(x) + \ldots + \\ + P_1(x)\, P_2(x) \ldots P_{n-1}(x)\, P'_n(x).$$

112. *La derivata di* $[P(x)]^n$, *dove* n *è un numero intero e positivo e* $P(x)$ *una serie di potenze, è* $n\,[P(x)]^{n-1}\,P'(x)$.

Basta porre nel teorema precedente:

$$P_1(x) = P_2(x) = \ldots = P_n(x) = P(x).$$

Si deduce di qui un risultato notevole.

Poniamo:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h\, x^h, \quad [P(x)]^n = \sum_{h=0}^{\infty} a_h^{(n)}\, x^h,$$

$$[P(x)]^{n-1} = \sum_{h=0}^{\infty} a_h^{(n-1)}\, x^h;$$

sarà:

$$\sum_{h=1}^{\infty} h\, a_h^{(n)}\, x^{h-1} = n \sum_{h=0}^{\infty} . a_h^{(n-1)}\, x^h . \sum_{h=1}^{\infty} h\, a_h\, x^{h-1} = \\ = n \sum_{h=1}^{\infty} \left[x^{h-1} \sum_{k=1}^{h} k\, a_k\, a_{h-k}^{(n-1)} \right],$$

da cui:

$$a_h^{(n)} = \frac{n}{h} \sum_{k=1}^{h} k\, a_k\, a_{h-k}^{(n-1)}. \qquad (1)$$

113. Abbiasi una serie di potenze:

$$Q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, z^n,$$

il cui raggio di convergenza sia σ, ed un'altra serie di potenze:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h,$$

la quale per ogni valore di x di modulo inferiore ad una certa quantità ρ abbia valore assoluto non maggiore d'una quantità ρ' minore di σ di quanto poco si vuole. Allora la serie di serie di potenze:

$$R(x) = Q(P(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n [P(x)]^n$$

sarà equiconvergente in ogni campo contenuto nel cerchio di raggio ρ col centro nell'origine, e potrà quindi (art. 105) porsi sotto forma di una serie di potenze:

$$R(x) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h x^h,$$

dove:

$$c_h = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_h^{(n)}.$$

Dimostreremo ora, che *la derivata di $R(x)$ è il prodotto della derivata di $Q(z)$ per quella di $P(x)$.*

Si ha:

$$Q'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n z^{n-1},$$

quindi:

$$Q'[P(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n [P(x)]^{n-1} = \sum_{h=0}^{\infty} d_h x^h,$$

dove:

$$d_h = \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n\, a_h^{(n-1)}.$$

D'altra parte, per la (1) dell'art. prec.:

$$c_h = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, a_h^{(n)} = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{h} n\, k\, b_n\, a_k\, a_{h-k}^{(n-1)} =$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h} \left[k\, a_k \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n\, a_{h-k}^{(n-1)} \right] = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h} k\, a_k\, d_{h-k},$$

quindi:

$$R'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h\, c_h\, x^{h-1} = \sum_{h=1}^{\infty} \left[x^{h-1} \sum_{k=1}^{h} k\, a_k\, d_{h-k} \right],$$

ossia:

$$R'(x) = Q'(P(x)) \,.\, P'(x).$$

114. Possiamo proporci il problema di trovare, se esiste, una serie di potenze la quale sia identica alla sua derivata. Se $P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h\, x^h$ è la serie cercata, dev'essere:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h\, x^h = \sum_{h=1}^{\infty} h\, a_h\, x^{h-1},$$

ossia:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h\, x^h = \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)\, a_{h+1}\, x^h,$$

donde, per tutti i valori di h:

$$a_h = (h+1)\, a_{h+1},$$

e quindi:

$$a_0 = 1\,!\,a_1 = 2\,!\,a_2 = 3\,!\,a_3 = \ldots,$$

ossia:

$$a_h = \frac{a_0}{h\,!}.$$

La serie cercata è dunque:

$$a_0\left(1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \ldots\right);$$

lo sviluppo tra parentesi si dice *serie esponenziale*, e si suole indicare con e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \ldots = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^h}{h\,!}$$

(colla nota convenzione: $0\,! = 1$).

La serie esponenziale è assolutamente convergente per qualunque valore di x, giacchè il rapporto del termine n-esimo all'(n-1)-esimo tende a zero al tendere di n all'infinito. Il raggio di convergenza della serie è dunque infinito.

La proprietà fondamentale della serie esponenziale è la seguente:

$$e^x\, e^y = e^{x+y}. \tag{1}$$

Si ha infatti:

$$e^x\, e^y = \sum_{h=0}^{\infty} \left[\frac{x^h}{h\,!} + \frac{x^{h-1}\,y}{h-1\,!\,1\,!} + \frac{x^{h-2}\,y^2}{h-2\,!\,2\,!} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{x^2\,y^{h-2}}{2\,!\,h-2\,!} + \frac{x\,y^{h-1}}{1\,!\,h-1\,!} + \frac{y^h}{h\,!}\right];$$

ma:

$$\binom{h}{r} = \frac{h!}{h-r!\,r!},$$

quindi:

$$e^x e^y = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}\left[x^h + \binom{h}{1} x^{h-1} y + \binom{h}{2} x^{h-2} y^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \binom{h}{h-2} x^2 y^{h-2} + \binom{h}{h-1} x\, y^{h-1} + y^h \right] =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x+y)^h}{h!} = e^{x+y}.$$

Dalla (1) e dalla $e^0 = 1$ segue:

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

115. Se $P(x)$ è una serie di potenze, $e^{P(x)}$ è (art. 105) una serie di potenze convergente almeno entro il cerchio di convergenza di $P(x)$. La sua derivata è (art. 113, 114):

$$e^{P(x)} P'(x).$$

116. Abbiasi la serie di potenze:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h, \qquad (1)$$

il cui raggio di convergenza sia ρ. Indichiamo con c un punto interno del suo cerchio di convergenza, e poniamo:

$$x = c + x_1;$$

la $P(x)$ si muterà in una somma di infiniti polinomi in x_1:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h (c + x_1)^h = \varphi(x_1). \qquad (2)$$

Poichè la (1) è (art. 88) equiconvergente in ogni campo interno al cerchio ρ, essa lo sarà in particolare su qualunque circonferenza di centro c contenuta entro questo cerchio; quindi (art. 105) la $\varphi(x_1)$ potrà trasformarsi in una serie di potenze di x_1:

$$\varphi(x_1) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x_1^r ,$$

dove A_r è la somma dei coefficienti di x_1^r nei termini della (2). La forma generale di questi termini è:

$$a_h (c + x_1)^h = a_h \sum_{r=0}^{h} \binom{h}{r} c^{h-r} x_1^r ,$$

onde, osservando che x_1^r compare solo nei termini in cui $h \geqq r$:

$$A_r = \sum_{h=r}^{\infty} \binom{h}{r} a_h c^{h-r} =$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{h=r}^{\infty} h(h-1)\ldots(h-r+1) a_h c^{h-r}.$$

Ma questa espressione è la derivata r-esima di $P(x)$ in cui si è fatto $x = c$; quindi si ha:

$$A_r = \frac{1}{r!} P^{(r)}(c),$$

e (convenendo che $P^{(0)}(c) = P(c)$):

$$P(x) = \varphi(x_1) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} P^{(r)}(c)\, x_1^r,$$

ossia:

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} P^{(r)}(c) =$$

$$= P(c) + \frac{x-c}{1!} P'(c) + \frac{(x-c)^2}{2!} P''(c) + \ldots,$$

che è la nota *serie di Taylor*. Essa è convergente in ogni cerchio col centro in c contenuto entro il cerchio di convergenza della (1), e quindi il suo raggio di convergenza non è minore di $\rho - |c|$.

117. Dalla formola trovata segue:

$$\frac{P(x) - P(c)}{x - c} =$$

$$= P'(c) + \frac{x-c}{2!} P''(c) + \frac{(x-c)^2}{3!} P'''(c) + \ldots$$

Al tendere di x a c, tutti i termini della serie del secondo membro, meno il primo, tendono a zero, e quindi, essendo la serie equiconvergente, tende a zero la loro somma. Ne segue:

$$\lim_{x=c} \frac{P(x) - P(c)}{x - c} = P'(c).$$

Cioè *la nostra definizione di derivata coincide con quella data dal Calcolo infinitesimale.*

Serie dedotte.

118. La relazione trovata (art. 116):

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} P^{(r)}(c) \qquad (1)$$

trasforma una serie di potenze di x in una serie di potenze di $x - c$, essendo c un punto interno al cerchio di convergenza ρ della prima serie. Il raggio di convergenza ρ_1 della seconda serie è almeno eguale a $\rho - |c|$, e però il cerchio di convergenza della seconda serie, o è tangente internamente al cerchio ρ, o esce in parte da esso.

La serie che figura nel secondo membro della (1) dicesi la serie *dedotta* dalla $P(x)$ rispetto al punto c. Indicando in generale con $P(x)$ una serie di potenze di x, si suol designare con $P(x \mid c)$ la serie dedotta da essa rispetto ad un punto c.

Per ogni punto x interno ai cerchi di convergenza di ambe le serie si ha:

$$P(x) = P(x \mid c).$$

Prendasi ora un punto d interno al cerchio di raggio ρ_1 e di centro c. La serie dedotta dalla $P(x \mid c)$ rispetto al punto d, che può denotarsi con $P(x \mid c, d)$, sarà una serie di potenze di:

$$[(x-c)-(d-c)],$$

ossia di $(x - d)$. Se il punto d è interno anche al cerchio ρ, potremo formare anche la serie $P(x \mid d)$

dedotta da $P(x)$ rispetto al punto d, la quale sarà pure una serie di potenze di $(x - d)$. Dimostreremo che $P(x \mid c, d)$ e $P(x \mid d)$ sono tra loro identiche.

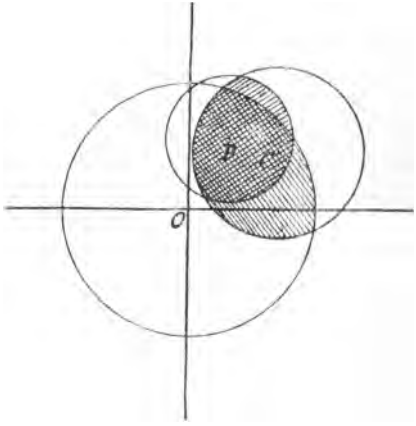


Fig. 1.

Diciamo ρ_2, ρ_2' i raggi di convergenza di queste due serie.

Nei punti interni ai cerchi ρ, ρ_1 si ha:

$$P(x) = P(x \mid c);$$

nei punti interni ai cerchi ρ_1, ρ_2 si ha:

$$P(x \mid c) = P(x \mid c, d);$$

nei punti interni ai cerchi ρ, ρ_2' si ha:

$$P(x) = P(x \mid d).$$

Quindi, indicando con $\overline{\rho_2}$ il più piccolo dei raggi dei due cerchi concentrici ρ_2, ρ_2', nei punti comuni ai tre cerchi ρ, ρ_1, $\overline{\rho_2}$ * sarà:

$$P(x) = P(x \mid c, d), \qquad P(x) = P(x \mid d),$$

e per conseguenza:

$$P(x \mid c, d) = P(x \mid d).$$

Pertanto questa eguaglianza avrà luogo in tutti i punti di un certo cerchio di centro d, donde segue (art. 95):

$$P(x \mid c, d) \equiv P(x \mid d).$$

Ciò si esprime dicendo che: *Le serie dedotte* MEDIATAMENTE *e* IMMEDIATAMENTE *da una serie data rispetto ad uno stesso punto interno al suo cerchio di convergenza sono identicamente eguali.*

Il teorema si estende senza difficoltà al caso di un numero qualunque di punti intermedi, purchè tutti questi giacciano nell'interno del cerchio di convergenza della serie primitiva.

119. Se l'origine sta nell'interno del cerchio ρ_1, si può far coincidere con essa il punto d, ed allora l'ultima relazione trovata diviene:

$$P(x \mid c, 0) \equiv P(x).$$

Cioè: *La serie primitiva può considerarsi come dedotta dalla sua serie dedotta.*

---

* Tali punti esistono sempre nell'ipotesi che c sia interno al cerchio ρ e d lo sia ad ambi i cerchi ρ, ρ_1.

Dimostreremo che, anche quando l'origine non è interna al cerchio ρ_1, la serie $P(x)$ può considerarsi come dedotta — però mediatamente — dalla $P(x \mid c)$.

Sia A il punto d'intersezione del prolungamento di OC colla circonferenza ρ, M il punto d'intersezione di OC colla circonferenza ρ_1, sicchè:

$$OC = |c| = \gamma, \quad OA = \rho, \quad OM = \gamma - \rho_1.$$

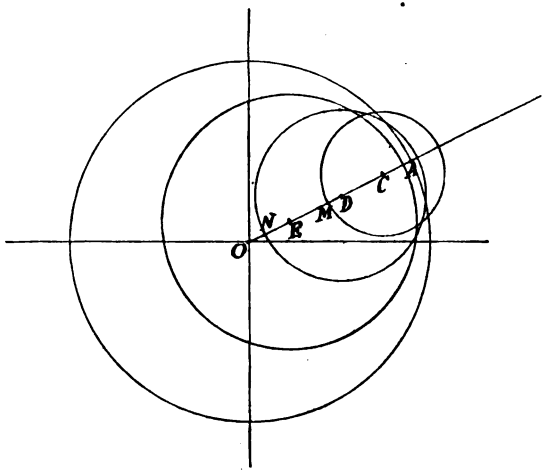


Fig. 2.

Prendasi sul segmento MA un punto D, che rappresenti il numero complesso d, e sia ρ_2 il raggio di convergenza della serie $P(x \mid c, d)$. Se l'origine è interna al cerchio ρ_2, si avrà:

$$P(x \mid c, d, 0) = P(x).$$

Nel caso contrario, sia N l'intersezione del segmento OD colla circonferenza γ_2, e prendasi un punto E del segmento NA, il quale rappresenti il numero e. Sia ρ_3 il raggio di convergenza della serie $P(x \mid c, d, e)$. Vogliamo dimostrare che, continuando in tal modo, si giungerà necessariamente, dopo un numero finito di passaggi, ad un cerchio contenente nel suo interno l'origine.

Si ha (art. 118), posto $|d| = \delta$, $|e| = \varepsilon, \ldots$:

$$\rho_1 \geqq \rho - \gamma, \quad \rho_2 \geqq \rho - \delta, \quad \rho_3 \geqq \rho - \varepsilon, \ldots;$$

inoltre:

$$OM = \gamma - \rho_1, \quad OD > \gamma - \rho_1, \quad ON = \delta - \rho_2,$$
$$OE > \delta - \rho_2, \quad OP = \varepsilon - \rho_3, \ldots$$

Porremo:

$$\delta = OD = \gamma - \rho_1 + \sigma, \quad \varepsilon = OE = \delta - \rho_2 + \sigma, \ldots,$$

dove:

$$\sigma = \frac{\rho - \gamma}{2} > 0.$$

Avremo:

$$ON = \delta - \rho_2 \leqq 2\delta - \rho = 2\gamma - 2\rho_1 + 2\sigma - \rho = \gamma - 2\rho_1,$$
$$OP = \varepsilon - \rho_3 \leqq 2\varepsilon - \rho =$$
$$= 2(\delta - \rho_2) + 2\sigma - \rho \leqq 2(\gamma - 2\rho_1) + 2\sigma - \rho = \gamma - 4\rho_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ora le quantità $\gamma - \rho_1$, $\gamma - 2\rho_1$, $\gamma - 4\rho_1, \ldots$ non possono essere tutte positive, quindi dopo un numero finito di deduzioni si giungerà ad un cerchio di convergenza che conterrà nel suo interno l'origine.

120. Dalle cose dette nell'art. precedente segue un risultato importante.

Si è trovato:

$$\rho_1 \geqq \rho - \gamma;$$

ma, poichè la $P(x)$ può considerarsi come dedotta dalla $P(x \mid c)$, si avrà per la stessa ragione:

$$\rho \geqq \rho_1 - \gamma,$$

donde segue:

$$\rho + \gamma \geqq \rho_1 \geqq \rho - \gamma. \qquad (1)$$

Ciò si può esprimere geometricamente dicendo che: *Il cerchio di convergenza della serie $P(x \mid c)$ è compreso fra il cerchio di centro c che tocca internamente il cerchio di convergenza della $P(x)$, e quello che lo tocca esternamente.*

Dalla (1) risulta pure che: *Il raggio di convergenza della serie dedotta $P(x \mid c)$ è funzione continua di c.*

121. *La derivata della serie dedotta da una serie data rispetto ad un punto c è la serie dedotta rispetto al punto c dalla derivata della serie primitiva.*

Poniamo:

$$Q(x-c) = P(x \mid c) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} P^{(r)}(c);$$

sarà:

$$Q'(x-c) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(x-c)^{r-1}}{r-1!} P^{(r)}(c) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} P^{(r+1)}(c).$$

D'altra parte:

$$P'(x \mid c) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} (P')^{(r)}(c) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} P^{(r+1)}(c),$$

onde:

$$Q'(x-c) = P'(x \mid c).$$

122. *Il limite inferiore dei raggi di convergenza delle serie dedotte da una serie data rispetto a tutti i punti interni del suo cerchio di convergenza, è nullo.*

Sia λ il limite inferiore dei raggi di convergenza, e suppongasi $\lambda > 0$. Prendasi una quantità positiva $\lambda' < \lambda$, ed una $\rho' < \rho$; se c è un punto qualunque della circonferenza di centro 0 e di raggio ρ', la serie dedotta rispetto a questo punto:

$$P(x \mid c) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} P^{(r)}(c)$$

avrà, per la definizione di λ, raggio di convergenza non minore di λ, quindi maggiore di λ', sicchè essa sarà convergente, e però continua, in tutto il cerchio di centro c e di raggio λ', il contorno incluso. L'insieme di tutti i cerchi di raggio λ' aventi il centro sulla circonferenza ρ' ricopre la corona circolare compresa tra le circonferenze di raggi $\rho' - \lambda'$ e $\rho' + \lambda'$ col centro nell'origine. I valori di $P(x)$ nei punti del cerchio $\rho' - \lambda'$, quelli comuni a $P(x)$ ed alle varie $P(x \mid c)$ nella corona tra $\rho' - \lambda'$ e ρ', e quelli delle varie $P(x, c)$

nella corona tra ρ' e $\rho' + \lambda'$, costituiscono una funzione continua in tutto il cerchio $\rho' + \lambda'$ (il contorno incluso). Il modulo di questa funzione è pure (art. 84) una funzione continua, quindi ammette un massimo finito M; e, se indichiamo con M_c il massimo modulo di $P(x \mid c)$ sulla circonferenza di centro c e di raggio λ', sarà $M_c \leq M$. Ora si ha (art. 103):

$$\frac{1}{r!} \mid P^{(r)}(c) \mid \leq \frac{M_c}{\lambda'^r};$$

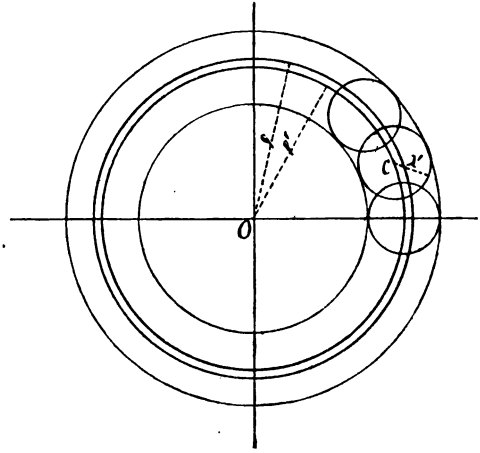


Fig. 3.

ne segue:

$$\frac{1}{r!} \mid P^{(r)}(c) \mid \leq \frac{M}{\lambda'^r},$$

ossia:

$$\left| \sum_{h=r}^{\infty} \binom{h}{r} a_h c^{h-r} \right| \leq \frac{M}{\lambda'^r},$$

per tutti i valori c di modulo ρ'. Applicando quindi il teorema dell'art. 103 alla serie:

$$\sum_{h=r}^{\infty} \binom{h}{r} a_h x^{h-r},$$

si ha:

$$\binom{h}{r} | a_h | \leq \frac{M}{\lambda'^r \rho'^{h-r}},$$

ossia:

$$\binom{h}{r} \lambda'^r \rho'^{h-r} | a_h | \leq M,$$

e sommando per tutti i valori di r da 0 ad h:

$$(\rho' + \lambda')^h | a_h | \leq (h+1) M,$$

da cui:

$$\sum_{h=0}^{\infty} | a_h | \xi^h \leq M \sum_{h=0}^{\infty} (h+1) \left(\frac{\xi}{\rho' + \lambda'} \right)^h.$$

È noto (cfr. art. 107) che la serie del secondo membro è convergente per:

$$\frac{\xi}{\rho' + \lambda'} < 1;$$

ne segue che la $P(x)$ è assolutamente convergente per ogni x di modulo minore di $\rho' + \lambda'$. Ora, fis-

sata λ', può sempre scegliersi ρ' in modo che sia $\rho' + \lambda' > \rho$; sicchè si giunge alla conclusione che la $P(x)$ è convergente in punti esterni al suo cerchio di convergenza, ciò che è assurdo.

Dunque $\lambda = 0$, e il teorema resta dimostrato.

123. Considerando il raggio di convergenza ρ_c della serie dedotta rispetto ad un punto c come una funzione reale di c definita in tutto l'interno del cerchio ρ, questa funzione (art. 122) ha per limite inferiore zero. Esisterà dunque (art. 83) un punto p in ogni intorno del quale il limite inferiore della funzione ρ_c è ancora zero.

Questo punto non può stare nell'interno del cerchio ρ. Supponiamo infatti esso sia interno, cioè sia:

$$|p| = \pi < \rho;$$

descritto un cerchio di centro p e di raggio:

$$\delta < \rho - \pi,$$

per tutti i punti interni a questo cerchio ρ_c avrà (art. 118) valore superiore a $\rho - \pi - \delta$, sicchè il suo limite inferiore entro il cerchio stesso non potrà essere zero.

Dunque il punto p sta sulla circonferenza ρ. *

Un punto, in ogni intorno del quale il limite inferiore dei valori di ρ_c è zero, dicesi *punto sin-*

---

* A ciò non contraddice la circostanza che la funzione ρ_c è definita soltanto per l'interno del cerchio ρ; giacchè noi possiamo completarne la definizione, senza alterarne il limite inferiore, attribuendo ad essa valori positivi qualunque nei punti della circonferenza ρ.

golare. Il risultato ottenuto può quindi esprimersi così:

Sulla circonferenza del cerchio di convergenza giace almeno un punto singolare.

124. *Un punto singolare non può giacere nell'interno del cerchio di convergenza di alcuna delle serie dedotte.*

Stia, se è possibile, il punto singolare p nell'interno del cerchio di convergenza (b) della serie dedotta, mediatamente o immediatamente, rispetto ad un punto b. Si descriva, centrando in p, un cerchio (p) tutto interno a (b). I cerchi (b) e (p) e il cerchio di convergenza (o) della serie primitiva avranno una parte comune; detto c un punto qualunque di questa, ρ_c sarà certo maggiore della minima distanza tra le circonferenze (b), (p), quindi il suo limite inferiore non potrà essere zero.

Dunque p non può stare nell'interno di alcun cerchio di convergenza.

Funzioni analitiche.

125. Abbiasi una serie di potenze $P(x)$, il cui raggio di convergenza, supposto finito, sia ρ; sia c un punto interno al cerchio ρ, e il raggio di convergenza di $P(x \mid c)$ sia maggiore di $\rho - |c|$ (art. 118), sicchè il cerchio di convergenza ρ_1 di questa serie esca in parte dal cerchio ρ. I valori di $P(x)$ nei punti di ρ non comuni a ρ_1, quelli di $P(x \mid c)$ nei punti di ρ_1 non comuni a ρ, e i valori comuni (art. 118) di ambe le serie nei punti

comuni a ρ ed a ρ_1, costituiranno, nella parte del piano ricoperta dall'uno almeno dei due cerchi, una funzione continua. Si dice allora che $P(x \mid c)$ è la *continuazione analitica* di $P(x)$ nella parte di ρ_1 esterna a ρ.

Se si ripetono le stesse considerazioni per tutte le serie deducibili mediatamente od immediatamente da $P(x)$, si verrà a definire una funzione continua $f(x)$ in tutta la parte del piano ricoperta dai cerchi di convergenza delle serie considerate. Questa parte di piano sarà di necessità tutta di un pezzo, o, come suol dirsi, *connessa*. Essa chiamasi il *campo d'esistenza* della *funzione analitica* $f(x)$; e la serie $P(x)$ e quelle da essa dedotte sono gli *elementi* della funzione analitica.

Poichè qualunque delle serie dedotte può considerarsi come primitiva (art. 119), può dirsi che: *Una funzione analitica è determinata completamente da uno qualunque dei suoi elementi.*

Se c è un punto interno al cerchio ρ, può accadere che, scelti opportunamente n punti $c_1, c_2, \ldots, c_n$, sia:

$$P(x \mid c_1, c_2, \ldots, c_n, c) = P(x \mid c). \qquad (1)$$

Ciò avviene in particolare (art. 118) ogniqualvolta i punti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono tutti interni al cerchio ρ. Se la (1) ha luogo, qualunque sieno i punti $c_1, c_2, \ldots, c_n$, e qualunque sia il punto c, si dice che la funzione è *uniforme* o *monodroma;* nel caso contrario si dice *non uniforme* o *polidroma.*

Una funzione uniforme prende un unico valore in ciascun punto del suo campo di esistenza.

Nel seguito, a meno di avvertenza in contrario, noi limiteremo sempre il nostro studio alle funzioni analitiche uniformi.

126. Suol dirsi che una funzione analitica *si comporta regolarmente* od *è regolare* in tutti i punti interni del suo campo d'esistenza, ossia in tutti i punti ai quali corrispondono elementi della funzione. I punti nei quali la funzione non è regolare diconsi *punti singolari* di essa.

Sono punti singolari d'una funzione analitica i punti singolari di tutti i suoi elementi (art. 123), giacchè questi punti (art. 124) non giacciono nell'interno di alcuno dei cerchi di convergenza dei vari elementi. Essi stanno evidentemente sul contorno del campo d'esistenza della funzione.

L'insieme dei punti singolari d'una funzione analitica è chiuso. — Infatti, se un punto limite p di tale insieme non fosse singolare, l'elemento corrispondente avrebbe un certo cerchio di convergenza, a tutti i punti interni del quale corrisponderebbero elementi dedotti, il che è impossibile.

127. *L'insieme dei punti del campo d'esistenza d'una funzione analitica, nei quali essa prende uno stesso valore, è isolato.*

Sia c uno dei punti in cui una funzione analitica $f(x)$ prende il valore a, $P(x-c)$ l'elemento della funzione ad esso corrispondente. Potrà assegnarsi (art. 95) un intorno del punto c, in nessun punto del quale la $P(x-c)$, e quindi la $f(x)$, prende il valore a, il che prova l'asserto.

E poichè questa dimostrazione vale (cfr. art. 94) anche se nel punto c del suo campo d'esistenza

la $f(x)$ prende un valore diverso da x, può concludersi:

I punti limiti dell' insieme dei punti in cui una funzione analitica prende uno stesso valore sono punti singolari. — Oppure (v. art. 5):

In ogni campo INTERNO *al campo d'esistenza di una funzione analitica la funzione prende lo stesso valore un numero finito di volte.*

Dal teorema dimostrato nella nota all'art. 95 segue:

Una funzione analitica non può essere sempre reale nè sempre puramente imaginaria in tutto il suo campo d'esistenza senza ridursi ad una costante.

E di qui come corollario:

Data la parte reale d'una funzione analitica (come funzione reale delle parti reale e imaginaria della variabile complessa), *è determinata, a meno d'una costante additiva, anche la sua parte imaginaria, e viceversa.*

Siano infatti $f(x)$, $f_1(x)$ due funzioni analitiche aventi la stessa parte reale $U(u, v)$ (dove $x = u + iv$); sia cioè:

$$f(x) = U(u, v) + i\,V(u, v),$$
$$f_1(x) = U(u, v) + i\,V_1(u, v).$$

Ne segue:

$$f(x) - f_1(x) = i\,[V(u, v) - V_1(u, v)].$$

Ma $f(x) - f_1(x)$, essendo sempre puramente imaginaria, deve ridursi ad una costante, il che dimostra l'asserto.

128. *Se c'è un punto interno del campo di esistenza d'una funzione analitica, l'elemento di*

questa corrispondente al punto c ha per cerchio di convergenza il più grande cerchio di centro c contenuto nel campo d'esistenza della funzione.

Infatti la circonferenza di questo cerchio, dovendo contenere almeno un punto singolare (articolo 123), ha necessariamente qualche punto comune col contorno.

129. *Se si hanno più funzioni analitiche* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)$, *i cui campi d'esistenza hanno una parte comune connessa* C, *e se fra i loro elementi* $P_1(x-c), P_2(x-c), \ldots, P_r(x-c)$ *corrispondenti ad un punto c di questa ha luogo una relazione razionale intera:*

$$F(P_1(x-c), P_2(x-c), \ldots, P_r(x-c)) = 0,$$

la stessa relazione sussiste fra gli elementi corrispondenti a qualunque altro punto del campo C (teorema della permanenza delle relazioni analitiche).

Sia ρ il raggio del massimo cerchio di centro c contenuto nel campo C, d un punto qualunque interno al cerchio ρ, ρ_1 il raggio del massimo cerchio di centro d contenuto nel campo C. Sarà, per tutti i punti x comuni ai cerchi ρ, ρ_1 (art. 118): $P_h(x-c \mid d-c) = P_h(x-c) \quad (h = 1, 2, \ldots, r)$, e quindi:

$$F(P_1(x-c \mid d-c), P_2(x-c \mid d-c), \ldots, \\ P_r(x-c \mid d-c)) = 0.$$

La stessa dimostrazione vale per tutti i punti del campo C, giacchè si può giungere da c ad uno qualunque di tali punti mediante una serie finita

di deduzioni. E quindi può scriversi, per tutti i punti di C:

$$F(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)) = 0.$$

130. Abbiansi due funzioni analitiche $f_1(x)$, $f_2(x)$, i cui campi d'esistenza abbiano una porzione connessa comune C, e supponiamo, per semplicità di scrittura, che questa contenga l'origine. Siano $P_1(x)$, $P_2(x)$ gli elementi delle due funzioni corrispondenti all'origine; la serie:

$$P_1(x) + P_2(x) = P(x)$$

genererà una funzione analitica $f(x)$, il cui campo d'esistenza comprenderà certamente il campo C (art. 92). L'elemento di questa funzione corrispondente ad un punto qualunque di C sarà (art. 129) la somma degli elementi di $f_1(x)$, $f_2(x)$ corrispondenti allo stesso punto; si scriverà:

$$f_1(x) + f_2(x) = f(x),$$

e la $f(x)$ potrà dirsi la *somma* delle due funzioni analitiche $f_1(x)$, $f_2(x)$.

Chiamasi cioè somma di due (o più) funzioni analitiche la funzione avente per elementi le somme dei loro elementi.

Una definizione del tutto analoga può stabilirsi pel *prodotto* di due o più funzioni analitiche.

131. Abbiasi ora una funzione analitica $f(x)$, la quale abbia valore diverso da zero nell'origine (supposta interna al suo campo d'esistenza).

Sia:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$$

l'elemento corrispondente all'origine; dovrà essere $a_0 \neq 0$. Potrà pertanto scriversi, per tutti i punti del cerchio di convergenza ρ di $P(x)$:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h x^h} = \frac{1}{a_0\left[1 + \frac{\theta}{a_0}\right]},$$

dove:

$$\theta = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{h=1}^{\infty} a_h x^h .$$

Ora si sa dall'Algebra che:

$$\frac{1}{1+k} = 1 - k + k^2 - \ldots = \sum_{h=0}^{\infty} (-k)^h$$

per $|k| < 1$; sarà dunque:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0}\left[1 - \frac{\theta}{a_0} + \frac{\theta^2}{a_0^2} - \ldots\right] \qquad (1)$$

per tutti i punti x per cui:

$$|\theta| = |f(x) - f(0)| < |a_0| .$$

Per un'osservazione già fatta (art. 94), esiste sempre un intorno dell'origine, che possiamo supporre circolare, di raggio $\rho' < \rho$, in cui è verificata questa condizione; entro il cerchio ρ' avrà dunque luogo la (1). Presa ora una circonferenza di raggio $\bar{\rho} < \rho'$, e detto M il massimo del valore assoluto di θ su questa, si avrà per ogni punto della circonferenza e qualunque sia n:

$$\left|\sum_{h=n+1}^{\infty}\left(-\frac{\theta}{a_0}\right)^h\right| \leq \sum_{h=n+1}^{\infty}\left(\frac{M}{|a_0|}\right)^h ,$$

e poichè la serie $\sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{M}{|a_0|}\right)^h$ è convergente, quella che figura nel 2.° membro della (1) sarà equiconvergente sulla circonferenza $\bar{\rho}$. Si potrà pertanto applicare il lemma di Weierstrass (art. 105), e convertire questa serie in una serie di potenze di x, onde si avrà nel cerchio ρ':

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0}(1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) = P_1(x).$$

Le serie $P(x)$, $P_1(x)$ sono legate dalla relazione:

$$P(x)\, P_1(x) = 1;$$

si avrà quindi (art. 129), designando con $f_1(x)$ la funzione analitica generata da $P_1(x)$:

$$f(x)\, f_1(x) = 1;$$

ossia:

$$f_1(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

La $f_1(x)$ dicesi la funzione *reciproca* di $f(x)$; il suo campo d'esistenza è generalmente diverso da quello di $f(x)$.

Dopo ciò si definisce come *quoziente* di due funzioni analitiche il prodotto della prima per la reciproca della seconda.

132. Sia $P(x)$ una serie di potenze, la quale generi la funzione analitica $f(x)$. La serie $P'(x)$ ha lo stesso raggio di convergenza della $P(x)$ (art. 107), e, se c è un punto interno del loro co-

mune cerchio di convergenza, la serie dedotta dalla $P'(x)$ rispetto a questo punto è (art. 121) la derivata della serie dedotta dalla $P(x)$ rispetto al punto stesso. Continuando il ragionamento allo stesso modo, si vede che la $P'(x)$ genera una funzione analitica $\varphi(x)$ dotata delle seguenti proprietà:

a) Essa ha lo stesso campo d'esistenza della $f(x)$;

b) Il suo elemento corrispondente ad un punto qualunque di questo campo è la derivata dell'elemento di $f(x)$ corrispondente allo stesso punto.

Noi chiameremo $\varphi(x)$ la *derivata* della $f(x)$, e la denoteremo con $f'(x)$.

133. Se le serie $P_1(x)$, $P_2(x)$, e:

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x)$$

generano rispettivamente le funzioni analitiche $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f(x)$, dove (art. 130):

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

si ha (art. 109):

$$P'(x) = P_1'(x) + P_2'(x); \qquad (1)$$

ma le $P_1'(x)$, $P_2'(x)$, $P'(x)$ generano (art. 132) le funzioni analitiche $f_1'(x)$, $f_2'(x)$, $f'(x)$, quindi segue dalla (1) (art. 130):

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x).$$

134. Si dimostra, con un ragionamento del tutto analogo, che, se:

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_r(x),$$

si ha (cfr. art. 111):

$$f'(x) = f_1'(x) f_2(x) f_3(x) \dots f_n(x) +$$
$$+ f_1(x) f_2'(x) f_3(x) \dots f_n(x) + \dots$$
$$+ f_1(x) f_2(x) \dots f_{n-1}(x) f_n'(x) =$$
$$= f(x) \sum_{r=1}^{n} \frac{f_r'(x)}{f_r(x)}.$$

135. Sia (art. 131):

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)};$$

questa relazione equivale all'altra:

$$f_1(x) = f(x) f_2(x).$$

Segue di qui (art. 134):

$$f_1'(x) = f'(x) f_2(x) + f(x) f_2'(x),$$

da cui, con qualche riduzione:

$$f'(x) = \frac{f_2(x) f_1'(x) - f_1(x) f_2'(x)}{f_2^2(x)}.$$

136. Sieno, come nell'art. 113, $P(x)$, $Q(z)$ due serie di potenze rispettivamente di x e di z, e sieno soddisfatte le condizioni ivi espresse perchè $Q(P(x))$ possa trasformarsi in una serie di potenze di x:

$$Q(P(x)) = R(x).$$

Se c è un punto interno al cerchio di raggio ρ col centro nell'origine, potrà formarsi la serie dedotta $P(x \mid c)$, e, poichè nella parte comune al

cerchio di convergenza di questa serie e al cerchio ρ $P(x \mid c) = P(x)$, si potrà asserire che, almeno entro il cerchio di centro c tangente internamente al cerchio ρ sarà:

$$| P(x \mid c) | < \sigma'.$$

Potremo allora trasformare la serie:

$$Q(P(x \mid c)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n [P(x \mid c)]^n$$

in una serie di potenze di $x - c$, che indicheremo con $S(x - c)$, sicchè:

$$S(x - c) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n [P(x \mid c)]^n .$$

D'altra parte si ha, in un certo intorno del punto c:

$$R(x \mid c) = R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n [P(x)]^n ,$$

ossia, essendo $P(x \mid c) = P(x)$:

$$R(x \mid c) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n [P(x \mid c)]^n ,$$

quindi:

$$R(x \mid c) = S(x - c).$$

Questa relazione dovendo sussistere in tutti i punti d'un certo intorno del punto c, deve aver luogo identicamente (art. 95). Si ha dunque identicamente:

$$R(x \mid c) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n [P(x \mid c)]^n .$$

Dopo ciò, se $P(x)$, $Q(z)$ generano rispettivamente le funzioni analitiche $f(x)$, $\varphi(z)$, la $\varphi(f(x))$ sarà una funzione analitica di x:

$$\varphi(f(x)) = F(x),$$

generata dall'elemento $R(x)$; inoltre si avrà (articolo 113):

$$F'(x) = \varphi'(f(x)) \,.\, f'(x).$$

In particolare, se:

$$F(x) = e^{f(x)},$$

si ha (art. 115):

$$F'(x) = e^{f(x)} f'(x).$$

Punti singolari. Teorema di Laurent.

137. *Una funzione analitica* * *non può essere regolare in tutto il piano* (compreso il punto all'infinito).

La funzione analitica $f(x)$ non abbia alcun punto singolare a distanza finita, per modo che il suo elemento $P(x)$ corrispondente all'origine avrà (art. 123) raggio di convergenza infinito. Supposto inoltre che il punto all'infinito non sia punto singolare per la $f(x)$, potrà questa funzione essere

* Non si deve dimenticare che qui parliamo soltanto di funzioni analitiche *uniformi*. È noto che esistono funzioni non uniformi non aventi alcun punto singolare; tali sono gli integrali abeliani di 1ª specie.

rappresentata da una serie $P_1\left(\frac{1}{x}\right)$ convergente — per la stessa ragione di prima — in tutto il piano. Descritto pertanto un cerchio di raggio ρ qualunque col centro nell'origine, la $f(x)$ sarà continua fuori e dentro di esso nonchè (per l'arbitrarietà di ρ) sulla circonferenza; e però il suo valore assoluto, che (art. 84) sarà pure una funzione continua in tutto il piano, ammetterà un massimo finito M. Si avrà dopo ciò (art. 103):

$$|a_h| \leq \frac{M}{\rho^h}.$$

Ma M è fisso, e ρ può prendersi arbitrariamente grande. Ne segue:

$$|a_h| = 0 \qquad \text{per} \qquad h > 0,$$

sicchè la funzione si riduce alla costante a_0. — Quindi una funzione che non si riduce ad una costante ha di necessità dei punti singolari.

138. Sieno $f(x)$, $f_1(x)$ due funzioni analitiche reciproche, sicchè:

$$f_1(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Poichè i campi d'esistenza delle due funzioni non sono necessariamente identici, potrà avvenire che un punto p, singolare per la $f(x)$, non lo sia per la $f_1(x)$.

I punti singolari d'una funzione che non sono tali per la sua reciproca diconsi *poli* o *punti d'in-*

finito o *punti singolari non essenziali;* gli altri *punti singolari essenziali.*

Sia p un polo della $f(x)$. Poichè in esso $f_1(x)$ è regolare, si avrà in un certo intorno di p:

$$f_1(x) = c_0 + c_1(x-p) + c_2(x-p)^2 + \ldots = P_1(x-p).$$

Se $c_0 \neq 0$, si potrà trovare (art. 131) una serie di potenze $P(x-p)$ convergente in un certo intorno di p e tale che in tutto quest'intorno sia:

$$P(x-p) \,.\, P_1(x-p) = 1,$$

e la funzione analitica generata dalla serie:

$$P(x-p)$$

non sarà altro che la $f(x)$, la quale perciò, contro l'ipotesi, sarebbe regolare in p.

Dev'essere dunque $c_0 = 0$.

Supponendo per generalità:

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0, \qquad c_m \neq 0,$$

avremo:

$$P_1(x-p) = (x-p)^m [c_m + c_{m+1}(x-p) + \\ + c_{m+2}(x-p)^2 + \ldots] = (x-p)^m Q_1(x-p),$$

dove $Q_1(x-p)$ è una serie di potenze di $x-p$ il cui termine costante non è nullo. Quindi, col ragionamento esposto poc'anzi, potrà trovarsi una serie di potenze $Q(x-p)$ tale che in un certo intorno di p sia:

$$Q(x-p) \,.\, Q_1(x-p) = 1.$$

La funzione analitica $\varphi_1(x)$ generata da $Q_1(x-p)$ sarà:

$$\varphi_1(x) = \frac{f_1(x)}{(x-p)^m} = \frac{1}{(x-p)^m f(x)};$$

la funzione analitica $\varphi(x)$ generata da $Q(x-p)$ sarà:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)} = (x-p)^m f(x).$$

Si giunge pertanto alla conclusione che: *Se p è un polo della funzione $f(x)$, esiste sempre un numero intero e positivo m tale che $(x-p)^m f(x)$ è regolare nel punto p.*

È evidente che, se $m' > m$, anche $(x-p)^{m'} f(x)$ è regolare nel punto p. Il minimo numero intero positivo m per cui $(x-p)^m f(x)$ è regolare nel polo p dicesi l'*ordine* del polo.

Posto:

$$Q(x-p) = d_0 + d_1(x-p) + d_2(x-p)^2 + \ldots,$$

si ha, in un certo intorno del punto p:

$$f(x) = \frac{d_0}{(x-p)^m} + \frac{d_1}{(x-p)^{m-1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{d_{m-1}}{x-p} + d_m + d_{m+1}(x-p) + \ldots$$

Cioè: *Una funzione analitica è rappresentabile nell'intorno d'un suo polo mediante una serie di potenze positive e negative di $(x-p)$, contenente soltanto un numero finito di potenze negative.*

La somma dei termini contenenti potenze negative dicesi la *caratteristica* del polo.

Sottraendo dalla funzione analitica la sua caratteristica* si ottiene una funzione regolare nel punto p e non avente alcuna nuova singolarità.**

139. Se la funzione $f(x)$ ha un polo d'ordine m nel punto p, la sua reciproca $f_1(x)$ è regolare in p, e la serie di potenze che la rappresenta nell'intorno di p manca dei primi m termini, cioè è il prodotto di $(x-p)^m$ per una serie di potenze di $x-p$ avente il termine costante non nullo. Si dice in questo caso, col linguaggio usato nell'Algebra, che la $f_1(x)$ ha una *radice* o un *posto-zero d'ordine m* nel punto p. — Reciprocamente, se $f_1(x)$ ha in un punto un posto-zero d'ordine m, $f(x)$ ha nel punto medesimo un polo dello stesso ordine.

---

* Notiamo che la caratteristica, essendo un polinomio — e quindi un caso speciale d'una serie di potenze — in $\frac{1}{x-c}$, è una funzione analitica esistente in tutto il piano tranne il punto c, e rappresentata dall'unico elemento costituito dal polinomio stesso.

** Pel punto all'infinito le cose dette si modificano come segue (cfr. art. 96):

Se la $f(x)$ ha un polo all'infinito, esiste un numero intero e positivo m tale che $\frac{1}{x^m} f(x)$ è regolare nel punto all'infinito.

Nell'intorno del punto all'infinito ha luogo il seguente sviluppo:

$$f(x) = d_0 x^m + d_1 x^{m-1} + \ldots + d_{m-1} x + d_m + \\ + \frac{d_{m+1}}{x} + \frac{d_{m+2}}{x^2} + \ldots$$

140. *Se p è un polo d'una funzione analitica $f(x)$, può determinarsi un intorno del punto p, in tutti i punti del quale, eccettuato p stesso, $f(x)$ è regolare.*

La funzione reciproca $f_1(x)$ è regolare e si annulla nel punto p, e però si può determinare (art. 127) un intorno di p in cui essa è regolare e non s'annulla mai (tranne in p stesso). In tutti i punti di quest'intorno, eccetto p, $f(x)$ sarà regolare.

Il teorema può anche enunciarsi così: *Un polo d'una funzione non può essere punto limite dell'insieme dei suoi punti singolari.* — E quindi, ricordando che questo insieme è chiuso (art. 126), può concludersi che: *Ogni punto limite d'un insieme di punti singolari è un punto singolare essenziale.*

141. *Se p è un polo d'una funzione analitica $f(x)$, presa una quantità positiva arbitrariamente grande A, può trovarsi un intorno di p in tutti i punti del quale $|f(x)| > A$.* — È per questa ragione che i poli vengono detti anche *infiniti* o *punti d'infinito* della funzione analitica.

Si è trovato (art. 138), per un certo intorno del punto p:

$$\varphi(x) = (x-p)^m f(x) =$$
$$= d_0 + d_1(x-p) + d_2(x-p)^2 + \dots$$

Poichè $\varphi(x)$ è funzione continua, può determinarsi un intorno del punto p, che possiamo supporre circolare, di raggio ρ', in tutti i punti del quale sia:

$$|\varphi(x) - \varphi(p)| = |\varphi(x) - d_0| < \frac{d_0}{2},$$

ossia:

$$\frac{|d_0|}{2} < |\varphi(x)| < \frac{3\,|d_0|}{2}.$$

D'altra parte può scegliersi una quantità positiva ρ'' tale che sia:

$$\rho''^m < \frac{|d_0|}{2A}.$$

Indicando pertanto con ρ una quantità positiva minore di ρ' e di ρ'', entro il cerchio di raggio ρ col centro in p si avrà:

$$|x-p| < \rho,$$

$$|f(x)| = \frac{|\varphi(x)|}{|x-p|^m} > \frac{|d_0|}{2\rho^m} > \frac{|d_0|}{2\rho''^m} > A,$$

come si voleva dimostrare.

142. Dobbiamo ora stabilire un lemma *, che ci servirà di base per la dimostrazione degli importanti teoremi che seguono.

Se $f(x)$ è una funzione analitica regolare in un campo C, presa σ ad arbitrio, si può trovare una quantità k tale che, essendo a, b, c tre punti qualunque d'un campo D interno a C che soddisfanno alle condizioni:

$$|b-a| < h, \quad |c-a| < h,$$

sia:

$$\left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \right| < \sigma.$$

* V. Pringsheim 167, 172.

I raggi di convergenza degli elementi della funzione corrispondenti ai punti del campo D ammettono un limite inferiore diverso da zero, che indicheremo con k. Presa quindi una quantità $k' < k$, qualunque sia il punto x del campo D, la funzione $f(x + k')$, e quindi anche la funzione $f''(x + k')$, sarà regolare; il valore assoluto di $f''(x + k')$ ammetterà dunque nel campo D un massimo finito, che designeremo con M. Scegliamo ora una quantità h minore di k' e minore di $\frac{\sigma}{2M}$:

$$h < k' < k, \qquad h < \frac{\sigma}{2M}.$$

Se a è un punto del campo D, e se b è un altro punto del campo stesso che disti da a meno di h, si avrà lo sviluppo convergente:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots =$$

$$= d_0 + d_1(b-a) + d_2(b-a)^2 + \ldots = \sum_{r=0}^{\infty} d_r (b-a)^r,$$

da cui:

$$f''(b) = \sum_{r=2}^{\infty} r(r-1) d_r (b-a)^{r-2} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (r+2)(r+1) d_{r+2} (b-a)^r.$$

Segue di qui (art. 103):

$$(r+2)(r+1) \mid d_{r+2} \mid \leq \frac{M}{h^r},$$

e quindi:

$$|d_{r+2}(b-a)^{r+2}| \leq \frac{1}{(r+2)(r+1)} \frac{M}{h^r} |b-a|^{r+2} <$$

$$< \frac{1}{(r+2)(r+1)} M |b-a|^2 <$$

$$< \frac{1}{(r+2)(r+1)} M h |b-a|,$$

donde, sommando da $r=0$ a $r=\infty$:

$$\sum_{r=0}^{\infty} |d_{r+2}(b-a)^{r+2}| <$$

$$< M h |b-a| \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r+2)(r+1)},$$

ossia, ricordando che la serie del secondo membro ha il valore 1: *

$$\sum_{r=0}^{\infty} |d_{r+2}(b-a)^{r+2}| < M h |b-a|,$$

ed a maggior ragione:

$$\left| \sum_{r=0}^{\infty} d_{r+2}(b-a)^{r+2} \right| < M h |b-a|.$$

Ora:

$$\sum_{r=0}^{\infty} d_{r+2}(b-a)^{r+2} =$$

$$= \sum_{r=2}^{\infty} d_r (b-a)^r = f(b) - f(a) - (b-a) f'(a),$$

* V. p. es. Cesàro, *Corso di dnalisi algebrica*, p. 149-150.

quindi dalla relazione precedente si ha:

$$\left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(a) \right| < Mh < \frac{\sigma}{2}.$$

Nello stesso modo si ottiene, per $|c-a| < h$:

$$\left| \frac{f(c)-f(a)}{c-a} - f'(a) \right| < \frac{\sigma}{2},$$

quindi:

$$\left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \right| < \sigma.$$

143. *Se una funzione analitica $f(x)$ è regolare in una corona circolare, il suo valor medio su qualunque circonferenza concentrica alla corona e in essa contenuta è indipendente dalla scelta di questa circonferenza.*

Sieno ρ_1 e $\rho_2 < \rho_1$ i raggi dei due cerchi che limitano la corona, il cui centro supporremo per semplicità nell'origine, e scegliamo due raggi qualunque ρ, $\bar{\rho} > \rho$ compresi fra ρ_1 e ρ_2. Presa poi una quantità σ ad arbitrio, e determinata h in modo che sia soddisfatto il lemma precedente per la corona compresa tra le circonferenze $\bar{\rho}$, ρ; scegliamo un numero intero positivo m tale che sia:

$$\frac{\bar{\rho}-\rho}{m} = \delta < h,$$

ed un altro n tale che, posto:

$$\alpha_n = e^{\frac{2\pi i}{2^n}},$$

sia:

$$\rho_1 \mid 1 - \alpha_n \mid < h.$$

Se poniamo $\rho + \delta = \rho'$, e inoltre:

$$\alpha_n^r \rho = a, \quad \alpha_n^r \rho' = b, \quad \alpha_n^{r+1} \rho = c,$$

sarà, qualunque sia il numero r:

$$\mid b - a \mid = \left| \alpha_n^r \rho' - \alpha_n^r \rho \right| = \rho' - \rho = \delta < h,$$

$$\mid c - a \mid = \left| \alpha_n^{r+1} \rho - \alpha_n^r \rho \right| =$$

$$= \rho \mid 1 - \alpha_n \mid < \rho_1 \mid 1 - \alpha_n \mid < h,$$

e quindi (art. 142):

$$\left| \frac{f\left(\alpha_n^r \rho'\right) - f\left(\alpha_n^r \rho\right)}{\alpha_n^r (\rho' - \rho)} - \frac{f\left(\alpha_n^{r+1} \rho\right) - f\left(\alpha_n^r \rho\right)}{\alpha_n^{r+1} \rho - \alpha_n^r \rho} \right| < \sigma,$$

ossia, moltiplicando per $\left| \alpha_n^r (\rho' - \rho) \right| = \delta$:

$$\left| f\left(\alpha_n^r \rho'\right) - f\left(\alpha_n^r \rho\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta}{\rho (\alpha_n - 1)} \left[\left(f\left(\alpha_n^{r+1} \rho\right) - f\left(\alpha_n^r \rho\right) \right) \right] \right| < \sigma \delta.$$

Sommiamo da $r = 0$ ad $r = 2^n - 1$, sostituiamo alla somma dei moduli il modulo della somma, ed osserviamo che:

$$\sum_{r=0}^{2^n - 1} \left(f\left(\alpha_n^{r+1} \rho\right) - f\left(\alpha_n^r \rho\right) \right) = 0;$$

avremo:

$$\left| \sum_{r=0}^{2^n-1} f\left(\alpha_n^r \rho'\right) - \sum_{r=0}^{2^n-1} f\left(\alpha_n^r \rho\right) \right| < 2^n \sigma \delta,$$

e quindi (art. 97):

$$| \mathbf{M}_n f(\rho') - \mathbf{M}_n f(\rho) | < \sigma \delta,$$

donde, passando al limite:

$$| \mathbf{M} f(\rho') - \mathbf{M} f(\rho) | \leq \sigma \delta.$$

Analogamente, se si pone:

$$\rho' + \delta = \rho'', \quad \rho'' + \delta = \rho''', \ldots, \rho^{(m-2)} + \delta = \rho^{(m-1)},$$

da cui:

$$\rho^{(m-1)} + \delta = \overline{\rho},$$

si avrà:

$$\begin{array}{l} | \mathbf{M} f(\rho'') - \mathbf{M} f(\rho') | \leq \sigma \delta, \\ | \mathbf{M} f(\rho''') - \mathbf{M} f(\rho'') | \leq \sigma \delta, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ | \mathbf{M} f(\overline{\rho}) - \mathbf{M} f(\rho^{(m-1)}) | \leq \sigma \delta, \end{array}$$

e di qui, sommando e sostituendo il modulo della somma alla somma dei moduli:

$$| \mathbf{M} f(\overline{\rho}) - \mathbf{M} f(\rho) | \leq m \sigma \delta = \sigma (\overline{\rho} - \rho) < \sigma (\rho_1 - \rho_2).$$

Ma σ è una quantità arbitrariamente piccola, quindi:

$$\mathbf{M} f(\overline{\rho}) = \mathbf{M} f(\rho).$$

144. *Una funzione analitica regolare in tutta una corona circolare di centro p è rappresentabile in tutti i punti di essa mediante una serie di potenze intere positive e negative di $x - p$ (teorema di Laurent).*

Sia $f(x)$ la funzione data, e sieno ρ_1, $\rho_2 < \rho_1$ i raggi dei cerchi che limitano la corona circolare considerata C, il cui centro supporremo per ora essere l'origine. Indicando con x_0 un punto interno della corona, la funzione:

$$\varphi(x) = \frac{x\,[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0}$$

è regolare in tutta la corona. Infatti:

$$x, \quad [f(x) - f(x_0)], \quad \frac{1}{x - x_0}$$

sono funzioni analitiche aventi per campo d'esistenza rispettivamente l'intero piano escluso il punto all'infinito, il campo C (o un campo che lo comprende), e l'intero piano escluso il punto x_0, quindi (art. 130) $\varphi(x)$ sarà una funzione analitica regolare in tutto il campo C escluso al più il punto x_0. Si può però dimostrare che essa è regolare anche in x_0. Per x abbastanza vicino ad x_0 si ha:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1\,!} f'(x_0) +$$
$$+ \frac{(x - x_0)^2}{2\,!} f''(x_0) + \ldots,$$

da cui:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\, Q(x - x_0)$$

(dove $Q(x - x_0)$ indica una serie di potenze intere e positive di $x - x_0$), inoltre:

$$x = x_0 + (x - x_0);$$

ne segue:

$$\varphi(x) = [x_0 + (x \quad x_0)]\, Q(x - x_0),$$

che dimostra l'asserto.

Ciò premesso, si ha, per $\rho_2 < \rho_2' < |x_0| < \rho_1' < \rho_1$ (art. 143):

$$\mathbf{M}\, \varphi(\rho_1') = \mathbf{M}\, \varphi(\rho_2'),$$

ossia:

$$\mathbf{M}\, \frac{\rho_1' [f(\rho_1') - f(x_0)]}{\rho_1' - x_0} = \mathbf{M}\, \frac{\rho_2' [f(\rho_2') - f(x_0)]}{\rho_2' - x_0},$$

o ancora (art. 99):

$$\mathbf{M}\, \frac{\rho_1' f(\rho_1')}{\rho_1' - x_0} - f(x_0)\, \mathbf{M}\, \frac{\rho_1'}{\rho_1' - x_0} =$$
$$= \mathbf{M}\, \frac{\rho_2' f(\rho_2')}{\rho_2' - x_0} - f(x_0)\, \mathbf{M}\, \frac{\rho_2'}{\rho_2' - x_0}.$$

Applicando le (1), (2), (3) dell'art. 104, si ha di qui:

$$\sum_{h=0}^{\infty} x_0^h\, \mathbf{M}\, \frac{f(\rho_1')}{\rho_1'^h} - f(x_0) = -\sum_{h=1}^{\infty} x_0^{-h}\, \mathbf{M}\, [\rho_2'^h f(\rho_2')].$$

Ora la funzione $x^h f(x)$ per ogni valore intero positivo, nullo o negativo di h è regolare nella corona C, quindi, indicando con ρ una quantità qualunque compresa fra ρ_1 e ρ_2, si ha (art. 143):

$$\mathbf{M}\, [\rho_1'^h f(\rho_1')] = \mathbf{M}\, [\rho_2'^h f(\rho_2')] = \mathbf{M}\, [\rho^h f(\rho)],$$

sicchè dalla relazione precedente risulta, scrivendo x invece di x_0:

$$f(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} x^h \mathbf{M}[\rho^{-h} f(\rho)],$$

o ancora, indicando con a_h la quantità costante $\mathbf{M}[(\rho^{-h} f(\rho)]$:

$$f(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h x^h .$$

Se la corona circolare, invece che l'origine, ha per centro un punto p, lo sviluppo assume la forma:

$$f(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h (x-p)^h . \qquad (1)$$

La formola può anche scriversi così:

$$f(x) = P_1(x-p) + P_2\left(\frac{1}{x-p}\right), \qquad (2)$$

dove le P_1, P_2 sono serie di potenze rispettivamente di $x-p$ e di $\frac{1}{x-p}$, e la P_2 manca del termine costante.

145. Supponiamo che una funzione analitica $f(x)$ ammetta un punto singolare p *isolato*, cioè tale che si possa descrivere un cerchio col centro in p, in tutti i punti del quale, tranne p stesso, la $f(x)$ sia regolare. Tali sono, p. es., i poli (articolo 140). — Detto ρ_1 il raggio di quel cerchio, e descritto, col centro in p, un altro cerchio di raggio ρ_2 arbitrario, purchè minore di ρ_1, nella corona circolare così determinata la $f(x)$ si comporta regolarmente, e quindi in tutti i punti di

essa può rappresentarsi mediante l'espressione (2) del precedente articolo. Secondochè p è un polo o un punto singolare essenziale, P_2 è un polinomio in $\frac{1}{x-p}$ od una serie infinita. In ogni caso la $P_2\left(\frac{1}{x-p}\right)$ prende il nome di *caratteristica* del punto singolare p, ed ha la proprietà che la differenza tra essa e la funzione considerata non ha più alcuna singolarità nel punto p. *

146. Sia in particolare p un punto singolare *essenziale,* il quale non sia punto limite dell'insieme dei punti singolari *essenziali* della funzione. Esso potrà essere, o no, punto limite dell'insieme dei poli.

Se lo è, in ogni suo intorno esistono poli, e quindi (art. 141) punti in cui la funzione è, in valore assoluto, maggiore d'una quantità arbitrariamente grande A.

Nel caso contrario la $f(x)$ può rappresentarsi (art. 145) mediante le formole (1), (2) dell'art. 144. Ora, se entro il cerchio ρ_1 (escluso il punto p) la $f(x)$ fosse sempre in valore assoluto inferiore ad una quantità finita M, applicando il teorema del-

---

* Se, indicando con I l'insieme dei punti singolari di $f(x)$, insieme il quale (art. 126) è chiuso, p è un punto di I appartenente ad I' ma non ad I'', la funzione può rappresentarsi in un certo intorno circolare ε di p (il punto stesso escluso) mediante una serie di potenze positive e negative di $x-p$, i cui coefficienti però variano ogniqualvolta il contorno di ε, supposto di raggio variabile, oltrepassa un punto di I (D'Arcais 4).

l'art. 103 alle serie P_1, P_2 si avrebbe per ogni valore di r:

$$| a_r | \leq \frac{M}{\rho_2^r}.$$

Ne segue — tenuto conto che ρ_2 è arbitrariamente piccola — che a_r, per ogni r negativa, dovrebbe essere nulla; la $f(x)$ si ridurrebbe allora ad una serie di potenze positive di $x - p$, e però sarebbe regolare in p. Dunque, qualunque quantità finita A si prenda, devono esistere, anche in questo caso, in ogni intorno di p punti in cui $| f(x) | > A$.

Dopo ciò, siccome in p anche la funzione $f(x) - l$, dove l è una costante qualunque, ha una singolarità della stessa natura di quella della $f(x)$, potrà dirsi lo stesso (art. 138) della $\frac{1}{f(x) - l}$; e però in ogni intorno di p vi saranno punti in cui questa ultima funzione è arbitrariamente grande in valore assoluto, ossia in cui $f(x)$ s'avvicina quanto si vuole ad l.

Concludendo:

In ogni intorno d'un punto singolare essenziale, che non sia punto limite di punti singolari essenziali, la funzione si avvicina quanto si vuole a qualunque valore prefisso (teorema di Casorati). *

---

* Non è giusto chiamare questo teorema, come fanno alcuni autori, teorema di WEIERSTRASS, avendolo CASORATI dimostrato per primo. (*Teorica delle funzioni di variabili complesse*, Pavia, 1868, § 88; *Un teorema fondamentale nella teoria delle discontinuità delle funzioni*, Rend. dell'Ist. Lomb., Serie II, Tomo 1, 1868, pag. 123-125.) V. BERTINI, *Commemorazione del Comm. Prof.* FELICE CASORATI, Rend. dell'Ist. Lomb., Serie II, Tomo 25, 1892, pag. 1206-1236.

Più chiaramente: Se p è il punto singolare, prese ad arbitrio tre quantità ρ, σ, A, di cui le due prime reali e positive e la terza affatto qualunque, entro il cerchio di raggio ρ col centro in p esistono certamente punti x pei quali sussiste la relazione:

$$|f(x) - A| < \sigma$$

e punti x pei quali sussiste la relazione:

$$\frac{1}{|f(x)|} < \sigma.$$

È importante notare la differenza che passa tra il modo di comportarsi d'una funzione nell'intorno d'un polo e nell'intorno d'un punto singolare essenziale. Avvicinandosi ad un polo, la funzione ha per unico limite ∞; avvicinandosi ad un punto singolare essenziale, essa ha per limiti tutti i valori reali e complessi, ossia è completamente indeterminata.

147. Il teorema dell'art. prec. presuppone due condizioni: l'una espressa, che il punto considerato non sia punto limite di punti singolari essenziali; l'altra tacita, che la funzione sia uniforme.

Che la mancanza della prima condizione infirmi la validità del teorema, lo ha dimostrato Pringsheim con esempi che vedremo più innanzi; che anche la seconda sia essenziale, risulta dall'esempio seguente dovuto a Hölder. *

La funzione polidroma $f(x) = \lg x$ ha nel punto

* Hölder 79, dove egli dà una nuova dimostrazione del teorema dell'art. 146. — V. anche Painlevé 136.

$x = 0$ una singolarità essenziale. Posto $x = r\,e^{i\varphi}$, si ha:

$$f(x) = \lg x = \lg r + i\,\varphi.$$

Prese quindi ad arbitrio, come nell'art. prec., ρ e σ, A non potrà scegliersi in modo del tutto arbitrario, ma sarà soggetto alla condizione che la sua parte reale sia algebricamente minore di $\lg \rho$.

148. Un'altra forma che si suol dare al teorema dell'art. 146 è la seguente: Il limite a cui tende la funzione quando la variabile si avvicina ad un punto singolare essenziale dipende dalla direzione secondo cui essa va verso questo punto.

Tale enunciato però non è esatto, giacchè può avvenire che, andando ad un punto singolare in una medesima direzione, cioè secondo linee aventi in quel punto la tangente comune, il limite a cui tende la funzione sia diverso a seconda della diversa curvatura delle linee nel punto stesso. *

Consideriamo p. es. la funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, che ha un punto singolare essenziale nell'origine. Posto $x = u + i\,v$, dove u e v sono reali, si trova:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{u}{u^2+v^2}}\left[\cos\frac{v}{u^2+v^2} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{v}{u^2+v^2}\right].$$

Se si va all'origine lungo l'asse reale positivo ($u > 0$, $v = 0$), la funzione tende ad ∞; se invece si segue l'asse reale negativo ($u < 0$, $v = 0$), la funzione ha per limite 0.

---

* Vivanti 206.

Si vada ora all'origine lungo una retta la cui equazione sia $v = h\,u$. Per un punto di questa retta si avrà:

$$f(x) = f(u\,(1 + i\,h)) =$$
$$= e^{\frac{1}{u(1+h^2)}} \left[\cos \frac{h}{u\,(1 + h^2)} - i \operatorname{sen} \frac{h}{u\,(1 + h^2)} \right].$$

Al tendere di u a zero, il modulo della funzione tende ad ∞ se la retta sta nel 1° o nel 4° quadrante ($u > 0$), a 0 se sta nel 2° o nel 3° ($u < 0$); il suo argomento cresce indefinitamente in senso positivo o in senso negativo secondochè la retta sta nel 3° o nel 4° quadrante ($v < 0$), oppure nel 1° o nel 2° ($v > 0$).

Infine, se si segue l'asse imaginario positivo o negativo, l'argomento cresce indefinitamente in senso negativo o positivo, mentre il modulo si mantiene costantemente eguale ad 1.

Supponiamo ora di andare all'origine lungo una circonferenza avente il centro sull'asse reale, ad una distanza a dall'origine, e quindi tangente all'asse imaginario. L'equazione di questa circonferenza è:

$$u^2 + v^2 - 2\,a\,u = 0,$$

e si ha per un punto qualunque di essa:

$$f(x) = e^{\frac{1}{2a}} \left[\cos \frac{v}{2\,a\,u} - i \operatorname{sen} \frac{v}{2\,a\,u} \right],$$

donde si vede che su quella circonferenza il modulo della funzione si mantiene costante ed eguale ad $e^{\frac{1}{2a}}$.

Il valor costante del modulo della funzione è diverso sulle diverse circonferenze tangenti nell'origine all'asse imaginario, e prende tutti i valori possibili da 0 ad ∞ quando si considerino tutte le circonferenze di tal natura poste sì a destra che a sinistra di quell'asse.

Le funzioni razionali considerate come funzioni analitiche. Le espressioni aritmetiche.

149. La definizione, apparentemente piuttosto artificiosa, di *funzione analitica* fa nascere il desiderio di vedere se, e fino a qual punto, il nuovo concetto di funzione si accordi con quello che è usuale nell'Analisi algebrica.

Le funzioni uniformi che si presentano nell'Algebra sono essenzialmente le funzioni razionali e le somme di infinite funzioni razionali. * A queste adunque noi dovremo ora rivolgere la nostra attenzione, per vedere se, e sotto quali condizioni, esse possano considerarsi come funzioni analitiche.

150. Una funzione razionale intera:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

è un caso particolare d'una serie di potenze con raggio di convergenza infinito, e però genera una

---

* Meno comuni sono i prodotti di infinite funzioni razionali, e le frazioni continue infinite i cui elementi sono funzioni razionali.

funzione analitica rappresentata completamente dall'elemento generatore. Tale funzione non ha alcuna singolarità a distanza finita, quindi (art. 137) — se non si riduce ad una costante — il punto all'infinito sarà per essa un punto singolare. Siccome poi:

$$\frac{1}{x^m} f(x) = \frac{a_0}{x^m} + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{x} + a_m$$

non contiene potenze positive di x e quindi è regolare nel punto all'infinito, così (art. 138) questo punto è un polo d'ordine m per la $f(x)$.

Dunque: *Un polinomio di grado m è una funzione analitica regolare in tutto il piano, fatta eccezione pel punto all'infinito che è per essa un polo d'ordine m.*

151. Dalle cose dette risulta una dimostrazione semplicissima del *teorema di Gauss.*

Abbiasi l'equazione algebrica:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m = 0.$$

Poichè la funzione analitica $f(x)$ ha un polo nel punto all'infinito, la sua reciproca $\frac{1}{f(x)}$ sarà regolare in questo punto. Essa quindi (art. 137) deve avere almeno un punto singolare c a distanza finita, ma questo non può essere se non un polo, perchè in esso la $f(x)$ è regolare. Ne segue (articolo 139) che $f(x)$ si annulla in c.

Dunque la $f(x)$ ha certamente una radice.

Di qui si deduce in modo noto che $f(x)$ si scompone in m fattori lineari.

152. Una funzione razionale fratta è un quoziente di due polinomi:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n},$$

che possiamo sempre supporre *ridotto ai minimi termini*, e dove $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$.

Poniamo (art. 151):

$$\psi(x) = b_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \ldots (x - c_r)^{k_r},$$

dove:

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n;$$

poichè la funzione analitica $\psi(x)$ è regolare in tutto il piano, tranne il punto all'infinito, in cui ha un polo di ordine n, e i punti $c_1, c_2, \ldots, c_r$ sono tutti e soli i suoi posti-zero, degli ordini rispettivi $k_1, k_2, \ldots, k_r$, la sua reciproca $\frac{1}{\psi(x)}$ sarà regolare dappertutto eccettochè nei punti $c_1, c_2, \ldots, c_r$ che saranno per essa dei poli degli ordini rispettivi $k_1, k_2, \ldots, k_r$ (art. 139). In altre parole, la $\frac{1}{\psi(x)}$ è regolare dappertutto fuorchè nei punti c_h, e $\frac{(x - c_h)^{k_h}}{\psi(x)}$ è regolare anche in c_h (art. 138) e non si annulla in questo punto. Poichè inoltre $\varphi(x)$ è regolare in ogni punto posto a distanza finita, e non s'annulla in alcuno dei punti c_h, il prodotto $\varphi(x) \frac{1}{\psi(x)}$ sarà regolare in ogni punto a distanza finita, tranne i punti c_h, e il prodotto

$\varphi(x)\dfrac{(x-c_h)^{k_h}}{\psi(x)}$ sarà regolare e non si annullerà in c_h; ossia $f(x)$ sarà una funzione analitica regolare in ogni punto a distanza finita, tranne i punti $c_1, c_2, \ldots, c_r$, che saranno per essa dei poli degli ordini rispettivi $k_1, k_2, \ldots, k_r$.

Per istudiare il modo di comportarsi della funzione nel punto all'infinito, facciamo la trasformazione $x=\dfrac{1}{x'}$; avremo:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{x'}\right)=\frac{a_0+\dfrac{a_1}{x'}+\dfrac{a_2}{x'^2}+\ldots+\dfrac{a_m}{x'^m}}{b_0+\dfrac{b_1}{x'}+\dfrac{b_2}{x'^2}+\ldots+\dfrac{b_n}{x'^n}}=$$

$$=x'^{n-m}\,\frac{a_m+a_{m-1}x'+\ldots+a_1x'^{m-1}+a_0x'^m}{b_n+b_{n-1}x'+\ldots+b_1x'^{n-1}+b_0x'^n}.$$

Osservando che nessuno dei due termini di questa ultima frazione si annulla per $x'=0$, si conclude, come prima, che il quoziente è regolare e diverso da zero per $x'=0$. Ne segue che per $n-m\geqq 0$ $f\left(\dfrac{1}{x'}\right)$ è regolare nel punto $x'=0$, ed ha ivi, se $n>m$, uno zero d'ordine $n-m$, per $n-m<0$ ha in questo punto un polo d'ordine $m-n$. Quindi la $f(x)$ è regolare nel punto all'infinito se $m\leqq n$, ed ha in esso, quando $m<n$, uno zero d'ordine $n-m$; invece ha un polo di ordine $m-n$ in quel punto se $m>n$.

È da notarsi che, quando uno zero od un polo s-uplo si contino per s zeri o per s poli, nel caso

di $m \leq n$ il numero totale degli zeri della $f(x)$ è n, cioè gli m zeri di $\varphi(x)$, ed uno zero d'ordine $n - m$ nel punto all'infinito, — ed il numero totale dei suoi poli è $k_1 + k_2 + \ldots + k_r$, ossia n; nel caso di $m > n$ il numero totale degli zeri è m, cioè gli zeri di $\varphi(x)$, e quello dei poli è pure m, cioè $k_1 + k_2 + \ldots + k_r + (m - n)$.

Anche nel caso più semplice d'un polinomio di grado m (art. 150) si ha un polo m-uplo ed m radici.

Riassumendo dunque, può dirsi che:

Le funzioni razionali (intere o fratte) *non hanno altre singolarità che dei poli; e il numero dei loro poli, compreso eventualmente il punto all'infinito, è eguale a quello dei loro zeri* (tenuto conto dell'ordine di moltiplicità degli uni e degli altri).

153. Reciprocamente, *una funzione analitica non avente altre singolarità che dei poli è una funzione razionale; e, in particolare, una funzione analitica avente un polo all'infinito e regolare del resto dappertutto è un polinomio.*

Dimostriamo dapprima la seconda parte. Se m è l'ordine del polo all'infinito della funzione $f(x)$ regolare in ogni altro punto, si avrà (art. 138) nell'intorno del punto all'infinito:

$$f(x) = d_0 x^m + d_1 x^{m-1} + \ldots + d_{m-1} x + d_m + \\ + \frac{d_{m+1}}{x} + \frac{d_{m+2}}{x^2} + \ldots$$

La differenza:

$$f(x) - (d_0 x_m + d_1 x^{m-1} + \ldots + d_{m-1} x)$$

è regolare nel punto all'infinito e non ha altre

singolarità, quindi (art. 137) si riduce ad una costante, la quale non è altro che d_m. Si ha dunque:

$$f(x) = d_0 x^m + d_1 x^{m-1} + \ldots + d_{m-1} x + d_m.$$

Abbia ora la funzione dei poli qualunque. Essi saranno *in numero finito*, giacchè altrimenti (articolo 5) ammetterebbero almeno un punto limite, il quale (art. 140) sarebbe un punto singolare essenziale. Sieno dunque i poli $c_1, c_2, \ldots, c_r$, e i loro ordini rispettivi $k_1, k_2, \ldots, k_r$; inoltre, per supporre il caso più generale, abbiasi un polo di ordine s all'infinito, essendo $s = 0$ se la funzione all'infinito è regolare.

La funzione $f(x)(x-c)^{k_1}$ sarà (art. 138) regolare nel punto c_1; inoltre, siccome (art. 150) $(x-c_1)^{k_1}$ non ha altre singolarità che un polo di ordine k_1 all'infinito, e non s'annulla in altri punti oltre c_1, la $f(x)(x-c_1)^{k_1}$ non avrà altre singolarità che un polo d'ordine $s+k_1$ all'infinito e dei poli degli ordini $k_2, k_3, \ldots, k_r$ nei punti $c_2, c_3, \ldots, c_r$. Ripetendo lo stesso ragionamento, si conclude che la funzione:

$$f(x)(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\ldots(x-c_r)^{k_r}$$

non ha altre singolarità che un polo d'ordine:

$$s + k_1 + k_2 + \ldots + k_r$$

all'infinito. Essa quindi, per ciò che si disse poco anzi, sarà un polinomio $\varphi(x)$, e si avrà:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\ldots(x-c_r)^{k_r}}.$$

154. Diremo *espressione aritmetica* una somma di infinite funzioni razionali, e *campo di convergenza* di essa la parte del piano in cui essa è convergente.

È importante osservare che il campo di convergenza d'un'espressione aritmetica può non essere *connesso*, cioè constare di più pezzi separati; tale è quello dell'espressione aritmetica:

$$\sum_{h=0} \frac{1}{x^h + x^{-h}},$$

che consta della parte del piano interna al cerchio di raggio 1 col centro nell'origine, e di quella esterna al cerchio stesso.

155. Abbiasi un'espressione aritmetica:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \varphi_h(x), \tag{1}$$

la quale sia equiconvergente in un intorno circolare, di raggio ρ, d'un punto c. Entro questo intorno nessuna delle funzioni razionali $\varphi_h(x)$ potrà avere poli, e però ciascuna di esse potrà svilupparsi in una serie di potenze di $x - c$ convergente entro il cerchio ρ:

$$\varphi_h(x) = P_h(x - c);$$

inoltre (art. 105) la serie:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} P_h(x - c)$$

potrà trasformarsi in una serie di potenze:

$$F(x) = P(x - c), \tag{2}$$

la quale sarà convergente nell'interno del cerchio ρ. Facciamo la stessa cosa per un punto d interno al cerchio ρ; otterremo per tutti i punti x d'un certo intorno ρ_1 di d:

$$F(x) = Q(x - d), \tag{3}$$

dove Q denota una serie di potenze. Per un punto x comune ai cerchi ρ, ρ_1 sussisteranno insieme le (2), (3), sicchè si avrà:

$$P(x - c) = Q(x - d).$$

Ma d'altra parte:

$$P(x - c) = P(x - c \mid d - c),$$

quindi:

$$P(x - c \mid d - c) = Q(x - d).$$

Ambi i membri sono serie di potenze di $x - d$, e l'eguaglianza deve aver luogo in tutto un certo intorno di d; quindi (art. 95):

$$P(x - c \mid d - c) \equiv Q(x - d).$$

Proseguendo il ragionamento allo stesso modo, si vede che:

a) Per ogni punto c nell'intorno del quale l'espressione analitica è equiconvergente, può trovarsi una serie di potenze avente lo stesso valore di essa in tutti i punti d'un intorno di c;

b) Se C è un campo CONNESSO, *contenente il punto c, e in questo campo l'espressione aritmetica è equiconvergente, le serie di potenze che la rappresentano negl'intorni dei vari punti di C sono le serie dedotte da quella che la rappresenta nell'intorno di c, cioè sono gli elementi di una medesima funzione analitica.*

Più brevemente: *Se un' espressione aritmetica $F(x)$ è equiconvergente in un campo connesso C, può trovarsi una funzione analitica $f(x)$ che la rappresenta in tutto quel campo.*

156. Si presenta ora una questione importante Può avvenire che l' espressione aritmetica $F(x)$ oltre che nel campo C, sia equiconvergente in un altro campo $\overline{C}$ separato da C. Partendo da un punto $\overline{c}$ del campo $\overline{C}$ si potrà trovare una funzione analitica $\overline{f}(x)$ che rappresenta la $F(x)$ nel campo $\overline{C}$ come la $f(x)$ la rappresenta nel campo C. Ora esiste una relazione necessaria tra le due funzioni analitiche $f(x)$, $\overline{f}(x)$? E, in particolare, se il campo d'esistenza della funzione analitica $f(x)$ contiene, oltre a C, anche $\overline{C}$, le due funzioni $f(x)$, $\overline{f}(x)$ sono necessariamente identiche tra loro?

157. Per rispondere alla seconda di queste domande, premettiamo il teorema seguente della teoria delle serie. *

Se $u_1, u_2, \ldots$ è una successione di quantità reali o complesse, tali che la serie $\sum_{h=1}^{\infty} u_h$ sia convergente o divergente (ma non indeterminata), *$n_1, n_2, \ldots$ una successione di numeri interi e positivi crescenti, e se si pone $\sum_{h=1}^{m} u_h = S_m$, la serie:*

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{u_{n_h+1} + u_{n_h+2} + \ldots + u_{n_{h+1}}}{S_{n_h} S_{n_{h+1}}} \qquad (1)$$

* D'Arcais 3.

è sempre convergente, e il suo valore è $\frac{1}{S_{n_1}}$ *se la* $\sum_{h=1}^{\infty} u_h$ *è divergente,* $\frac{1}{S_{n_1}} - \frac{1}{S}$ *se essa è convergente ed ha per somma* S.

La (1) può scriversi nelle forme seguenti:

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{1}{S_{n_h}} - \frac{1}{S_{n_{h+1}}}\right] = \left[\frac{1}{S_{n_1}} - \frac{1}{S_{n_2}}\right] + \left[\frac{1}{S_{n_2}} - \frac{1}{S_{n_3}}\right] + \ldots$$

$$= \frac{1}{S_{n_1}} - \lim_{r=\infty} \frac{1}{S_{n_{r+1}}},$$

Ora $\lim_{r=\infty} n_{r+1} = \infty$, e quindi:

$$\lim_{r=\infty} \frac{1}{S_{n_{r+1}}} = \lim_{m=\infty} \frac{1}{S_m},$$

e questo limite è 0 od $\frac{1}{S}$ secondochè la serie:

$$\sum_{h=1}^{\infty} u_h$$

è divergente oppure è convergente ed ha per somma S; sicchè la (1) ha, rispettivamente nei due casi, il valore $\frac{1}{S_{n_1}}$ o $\frac{1}{S_{n_1}} - \frac{1}{S}$.

158. È da osservarsi che la (1) dell'art. prec. è ancora convergente ed ha per somma $\frac{1}{S_{n_1}}$ se, pur essendo la serie $\sum_{h=1}^{\infty} u_h$ indeterminata, si ha:

$$\lim_{m=\infty} |S_m| = \infty. \qquad (1)$$

Ciò ha luogo in particolare ogniqualvolta il termine generale della serie cresce indefinitamente in valore assoluto, cioè:

$$\lim_{m=\infty} | u_m | = \infty. \qquad (2)$$

Infatti la (2) può scriversi:

$$\lim_{m=\infty} | S_m - S_{m-1} | = \infty;$$

ma:

$$| S_m - S_{m-1} | \leq | S_m | + | S_{m-1} |,$$

sicchè si ha:

$$\lim_{m=\infty} [| S_m | + | S_{m-1} |] = \infty,$$

ossia:

$$2 \lim_{m=\infty} | S_m | = \infty,$$

che equivale alla (1).

159. Abbiasi, dopo ciò, l'espressione aritmetica:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \varphi_h(x), \qquad (1)$$

e questa sia convergente in un campo C, e in un altro campo D sia divergente, oppure sia indeterminata ma in modo che sia:

$$\lim_{m=\infty} \left| \sum_{h=1}^{m} \varphi_h(x) \right| = \infty.$$

Pel teorema precedente, l'espressione aritmetica:

$$G(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \psi_r(x), \tag{2}$$

dove:

$$\psi_r(x) = \frac{\varphi_{n_r+1}(x) + \varphi_{n_r+2}(x) + \ldots + \varphi_{n_{r+1}}(x)}{S_{n_r}(x)\, S_{n_{r+1}}(x)} =$$

$$= \frac{1}{S_{n_r}(x)} - \frac{1}{S_{n_{r+1}}(x)},$$

$$S_m(x) = \sum_{h=1}^{m} \varphi_h(x),$$

e le n_r hanno il significato loro attribuito nel precedente articolo, avrà lo stesso valore di:

$$\frac{1}{S_{n_1}(x)} - \frac{1}{F(x)}$$

in tutti i punti del campo C, lo stesso valore di

$$\frac{1}{S_{n_1}(x)}$$

in tutti i punti del campo D. Osservando che $\frac{1}{S_{n_1}(x)}$, essendo una funzione razionale, è una funzione analitica avente per campo d'esistenza l'intero piano escluso un numero finito di punti (articolo 152), si vede che $G(x)$ è un'espressione aritmetica convergente nei campi separati C e D, la quale nel campo D è rappresentata dalla funzione analitica $\frac{1}{S_{n_1}(x)}$, mentre nel campo C *non* è rap-

presentata dalla stessa funzione analitica, * sebbene il campo di esistenza di questa comprenda anche il campo D.

Se poi in particolare la (1) è equiconvergente nel campo C, oltre al risultato *negativo* testè esposto, otteniamo anche il risultato *positivo* di aver determinato le due funzioni analitiche che rappresentano la $G(x)$ rispettivamente nei campi D e C; giacchè, detta $f(x)$ la funzione analitica che rappresenta l'espressione aritmetica $F(x)$ nel campo C, quella che rappresenta la $G(x)$ nello stesso campo è $\frac{1}{S_{n_1}(x)} - \frac{1}{f(x)}$.

160. Prendasi, p. es.:

$$\varphi_h(x) = x^{h-1},$$

e quindi:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} x^{h-1}.$$

Questa serie è convergente nel cerchio di raggio 1 col centro nell'origine; nei punti esterni a questo cerchio essa è divergente o indeterminata, ma il modulo del suo termine generale cresce indefinitamente. Potremo quindi assumere come campo C l'interno del cerchio di raggio 1 col centro nell'origine, come campo D l'esterno del cer-

---

* Giacchè, essendo $F(x)$ finita in tutto il campo C, si ha per tutti i punti di questo campo:

$$\frac{1}{S_{n_1}(x)} - \frac{1}{F(x)} \pm \frac{1}{S_{n_1}(x)}.$$

chio stesso. Nel campo C si ha, come è noto:

$$F(x) = \frac{1}{1-x}, \quad S_{n_r} = \frac{1-x^{n_r}}{1-x}.$$

Allora, pel teorema dimostrato, l'espressione aritmetica:

$$G(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{1-x}{1-x^{n_r}} - \frac{1-x}{1-x^{n_{r+1}}} \right] =$$

$$= (1-x) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^{n_r}(1-x^{n_{r+1}-n_r})}{(1-x^{n_r})(1-x^{n_{r+1}})}$$

sarà convergente tanto in C che in D, e il suo valore sarà:

in C, $\dfrac{1-x}{1-x^{n_1}} - (1-x)$ ossia $\dfrac{x^{n_1}(1-x)}{1-x^{n_1}}$,

in D, $\dfrac{1-x}{1-x^{n_1}}$;

o, ciò che è lo stesso, il valore di:

$$H(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^{n_r}(1-x^{n_{r+1}-n_r})}{(1-x^{n_r})(1-x^{n_{r+1}})}$$

sarà $\dfrac{x^{n_1}}{1-x^{n_1}}$ in C, e $\dfrac{1}{1-x^{n_1}}$ in D.

Prendasi in particolare $n_r = 2^{r-1}$; si avrà l'espressione aritmetica:

$$H(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^{2^{r-1}}}{1-x^{2^r}},$$

il cui valore sarà $\frac{x}{1-x}$ in C, e $\frac{1}{1-x}$ in D. Ne segue che l'espressione aritmetica:

$$K(x) = \frac{1+x}{1-x} - 2\,H(x) = \frac{1+x}{1-x} - 2\sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^{2^{r-1}}}{1-x^{2^r}} =$$

$$= \frac{1+x}{1-x} + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{1+x^{2^r}}{1-x^{2^r}} - \frac{1+x^{2^{r-1}}}{1-x^{2^{r-1}}} \right]$$

avrà in C il valore $+1$ e in D il valore -1. *

161. Rimane ora da risolvere la prima delle questioni che ci proponemmo nell'art. 156. A tal uopo dobbiamo ricordare il seguente teorema: **

Dato un cerchio nel piano della variabile complessa x ed un altro cerchio nel piano della variabile complessa x', è sempre possibile trovare una sostituzione lineare che trasformi il primo cerchio nel secondo e l'interno dell'uno nell'interno dell'altro.

Uno dei due cerchi, ed anche ambidue, possono, in particolare, avere raggio infinito, cioè ridursi a linee rette.

Abbiansi, dopo ciò, n cerchi $C_1, C_2, \ldots, C_n$, e dicasi C_0 la parte del piano esterna a tutti questi cerchi. Sieno date inoltre ad arbitrio $n+1$ espres-

---

* La serie $K(x)$ fu indicata da J. Tannery a Weierstrass nel 1881 (v. Weierstrass 216). La serie $H(x)$ era stata già considerata da E. Schröder nel 1876 (Weierstrass, ivi). V. anche Pringsheim 170.

** Per la dimostrazione vedi: G. Holzmueller, *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen*, Leipzig 1882, p. 61 e segg.

sioni aritmetiche $F_0(x)$, $F_1(x), \ldots, F_n(x)$ tali, che $F_r(x)$ $(r = 0, 1, \ldots, n)$ sia equiconvergente nel campo C_r. Potranno trovarsi $n+1$ funzioni analitiche $f_0(x)$, $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ tali, che:

$$f_r(x) \; (r = 0, 1, \ldots, n)$$

rappresenti $F_r(x)$ nel campo C_r; di più potranno determinarsi r sostituzioni lineari tali, che la:

$$x' = \frac{a_r x + b_r}{c_r x + d_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

trasformi il cerchio C_r nel cerchio di raggio 1, col centro nell'origine, del piano x', e l'interno del primo nell'interno del secondo. Allora l'espressione aritmetica:

$$K\left(\frac{a_r x + b_r}{c_r x + d_r}\right) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

avrà il valore $+1$ nell'interno del cerchio C_r e il valore -1 all'esterno di esso; e l'espressione aritmetica:

$$F_0(x) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\left[1 + K\left(\frac{a_r x + b_r}{c_r x + d_r}\right)\right][F_r(x) - F_0(x)]$$

sarà eguale ad $F_r(x)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$, e quindi sarà rappresentata dalla funzione analitica $f_r(x)$, nel campo C_r.

Concludendo, si può sempre costruire un'espressione aritmetica che sia rappresentata in parti separate del suo campo di convergenza da funzioni analitiche scelte ad arbitrio. E però *tra le funzioni analitiche che rappresentano una medesima*

espressione aritmetica in parti separate del suo campo di convergenza non esiste alcuna relazione necessaria.

162. A risultati analoghi si giunge considerando una forma assai meno comune di espressioni aritmetiche, le frazioni continue i cui termini sono funzioni razionali.*

Consideriamo la frazione continua:

$$\alpha = p + q - \cfrac{pq}{p + q - \cfrac{pq}{p + q - \dots}}. \qquad (1)$$

Qualunque sieno le quantità p, q, purchè di modulo diverso, essa è convergente. Indichisi con α_n la ridotta n-esima; si avrà:

$$\alpha_n = p + q - \frac{pq}{\alpha_{n-1}},$$

da cui:

$$\alpha_n - p = \frac{q}{\alpha_{n-1}}(\alpha_{n-1} - p),$$

$$\alpha_n - q = \frac{p}{\alpha_{n-1}}(\alpha_{n-1} - q),$$

e quindi:

$$\frac{\alpha_n - p}{\alpha_n - q} = \frac{q}{p}\,\frac{\alpha_{n-1} - p}{\alpha_{n-1} - q}.$$

Di qui, osservando che $\alpha_1 = p + q$, si ha:

$$\frac{\alpha_n - p}{\alpha_n - q} = \left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

* Lerch 100.

Al tendere di n ad infinito, il secondo membro tende a zero o ad infinito secondochè $|p| > |q|$ oppure $|p| < |q|$. Nel primo caso si ha dunque:

$$\alpha = \lim_{n=\infty} \alpha_n = p,$$

nel secondo:

$$\alpha = \lim_{n=\infty} \alpha_n = q.$$

Pongasi ora nella (1):

$$p = \varphi(x), \qquad q = \psi(x),$$

dove le $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sieno due funzioni razionali. La (1) diverrà un'espressione aritmetica:

$$F(x) = \varphi(x) + \psi(x) - \cfrac{\varphi(x)\psi(x)}{\varphi(x) + \psi(x) - \cfrac{\varphi(x)\psi(x)}{\varphi(x + \psi(x) - \ldots}} \quad . \qquad (2)$$

L'equazione:

$$|\varphi(x)| = |\psi(x)| \qquad (3)$$

rappresenta una curva od un sistema di curve γ, *

---

* Poniamo $\varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$, $\psi(x) = \frac{\psi_1(x)}{\psi_2(x)}$, dove $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ denotano dei polinomi, e le frazioni si suppongono irriducibili. La (3), sotto forma intera, sarà:

$$|\varphi_1(x)\psi_2(x)| = |\varphi_2(x)\psi_1(x)|. \qquad (\alpha)$$

Facciamo come sempre $x = u + iv$, e separiamo nei prodotti che figurano nei due membri le parti reale e imaginaria:

$\varphi_1(x)\psi_2(x) = \mu(u,v) + i\nu(u,v)$, $\varphi_2(x)\psi_1(x) = \rho(u,v) + i\sigma(u,v)$;

la (α) diverrà:

$$\mu^2(u,v) + \nu^2(u,v) - \rho^2(u,v) - \sigma^2(u,v) = 0,$$

che sarà l'equazione cartesiana della curva γ.

che dividono il piano in due o più campi separati, in alcuni dei quali $|\varphi(x)| > |\psi(x)|$, mentre negli altri $|\varphi(x)| < \psi(x)$. Diremo C i primi, D i secondi. Nei campi C si avrà $F(x) = \varphi(x)$, nei campi D invece $F(x) = \psi(x)$.

Facciamo p. es.:

$$\varphi(x) = x - 1, \qquad \psi(x) = x + 1;$$

l'equazione (3) rappresenta il luogo dei punti equidistanti dai punti $+1$ e -1, cioè l'asse imaginario. La regione C è l'insieme dei punti che distano più da $+1$ che da -1, cioè la parte del piano a sinistra dell'asse imaginario; la regione D è quella a destra di esso. L'espressione aritmetica:

$$F(x) = 2x - \cfrac{x^2 - 1}{2x - \cfrac{x^2 - 1}{2x - \ldots}}$$

è rappresentata da $x - 1$ a sinistra, da $x + 1$ a destra dell'asse imaginario.

Facciamo invece:

$$\varphi(x) = x^2 - 1, \qquad \psi(x) = a^2,$$

dove a è una costante reale e positiva; la (3) rappresenta una ellisse di Cassini i cui fuochi sono i punti ± 1. Nell'interno di essa si ha:

$$|x^2 - 1| < a^2,$$

all'esterno $|x^2 - 1| > a^2$; quindi l'espressione aritmetica:

$$F(x) = x^2 - 1 + a^2 - \cfrac{a^2(x^2 - 1)}{x^2 - 1 + a^2 - \cfrac{a^2(x^2 - 1)}{x^2 - 1 + a^2 - \ldots}}$$

è rappresentata da a^2 all'interno, da $x^2 - 1$ all'esterno della curva.

Generalità sullo studio sistematico delle funzioni analitiche. Proprietà fondamentali delle funzioni intere.

163. Il risultato ottenuto per le funzioni razionali (art. 150, 152, 153), *che esse sono le sole funzioni le quali hanno soltanto singolarità polari,* ci mostra quale influenza abbiano la natura ed il numero dei punti singolari d'una funzione sulla *forma analitica* di essa, e ci suggerisce di prendere a fondamento d'una classificazione sistematica delle funzioni analitiche la natura ed il numero delle loro singolarità. Una tale classificazione si riassumerebbe nello specchio seguente:

A. Funzioni senza singolarità.

B. Funzioni con soli poli:

1. Funzioni con un solo polo:
   a. all'infinito;
   b. a distanza finita.
2. Funzioni con un numero finito di poli.
3. Funzioni con infiniti poli.

C. Funzioni con singolarità qualunque:

1. Funzioni con un solo punto singolare:
   a. all'infinito;
   b. a distanza finita.
2. Funzioni con un numero finito di punti singolari.
3. Funzioni con infiniti punti singolari:
   a. funzioni con infiniti poli ed un solo punto singolare essenziale;

b. funzioni con infiniti poli ed un numero finito di punti singolari essenziali;

c. funzioni con infiniti punti singolari qualunque.

Le funzioni A si riducono a costanti (art. 137). Le $B\,1\,a$ sono i polinomi; le $B\,1\,b$ sono le funzioni della forma $f\left(\frac{1}{x-c}\right)$, dove f denota un polinomio e c è il polo; le $B\,2$ sono le funzioni razionali; le $B\,3$ non esistono (cfr. art. 153). Pertanto lo studio sistematico delle funzioni analitiche, che noi ci proponiamo ora di imprendere, è già stato iniziato, per dir così, inconsciamente, nelle precedenti pagine; e noi dobbiamo riprenderlo al punto al quale è rimasto interrotto, incominciando a considerare le funzioni C, e fra queste le $C\,1\,a$: *funzioni aventi un solo punto singolare all'infinito.*

Queste funzioni, che si presentano per prime al nostro studio come la più ovvia generalizzazione dei polinomi — giacchè a polinomi esse si riducono quando la loro singolarità sia polare —, ci appariranno un'altra volta sotto la stessa luce quando ne avremo determinato (v. art. seg.) la forma analitica generale; e ciò vale a riprova dell'osservazione poc'anzi fatta sul nesso stretto che passa tra la forma analitica d'una funzione e le sue singolarità.

Le funzioni aventi un solo punto singolare all'infinito diconsi *intere* od *olomorfe.* Alla denominazione di *intere* s'aggiunge l'altra di *trascendenti*, quando si vuol affermare che la singolarità esistente all'infinito è essenziale.

164. Sia $f(x)$ una funzione intera, e sia $P(x)$

il suo elemento corrispondente all'origine, dove — come in ogni altro punto a distanza finita — essa è regolare. La serie $P(x)$ avrà (cfr. art. 137) raggio di convergenza infinito, e però basterà a rappresentare la funzione $f(x)$ nell'intero piano. Cioè:

Una funzione intera è rappresentata da una serie di potenze convergente in tutto il piano.

Se la serie di potenze si riduce ad avere un numero finito di termini, la funzione diviene un polinomio e il punto all'infinito è un polo di esso; e reciprocamente.

La somma e il prodotto di più funzioni intere sono funzioni intere.

La derivata e l' integrale d' una funzione intera sono funzioni intere (art. 132).

165. La grande analogia che esiste fra i polinomi e le funzioni intere trascendenti suggerisce l'idea di esaminare quali tra le proprietà fondamentali di quelli sussistano anche per queste.

Le proprietà fondamentali dei polinomi sono essenzialmente due (art. 151), di cui la seconda è una conseguenza della prima:

a) Esistenza d'una radice (teorema di Gauss).

b) Decomponibilità in fattori lineari, e conseguente possibilità di costruire un polinomio date le sue radici.

Quanto al teorema di Gauss, è facile accertarsi con un esempio che esso non vale sempre per le funzioni trascendenti intere. La funzione e^x (articolo 114), che è rappresentata da una serie convergente in tutto il piano, non s'annulla mai. Infatti essa, anzitutto, non può annullarsi per alcun

valore reale e positivo di x, come è evidente dalla forma del suo sviluppo; inoltre, se si annullasse per $x = x_1$, essendo:

$$e^{x_1} e^{x-x_1} = e^x,$$

ed e^{x-x_1} finita, sarebbe $e^x = 0$ per qualunque valore di x.

Di qui nasce spontanea la domanda, quale sia la forma più generale delle funzioni intere prive di radici.

Sia $f(x)$ una funzione intera la quale non abbia alcuna radice. La sua reciproca $\frac{1}{f(x)}$ non avrà alcun polo (art. 139); e non potendo avere neppure punti singolari essenziali a distanza finita, giacchè questi sarebbero tali anche per $f(x)$, sarà una funzione intera. Essendo intera anche (articolo 164) $f'(x)$, lo sarà pure (ivi) $\frac{f'(x)}{f(x)}$, e così (ivi) l'integrale di quest'ultimo rapporto; cioè, posto:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x),$$

$g(x)$ sarà una funzione intera. Se facciamo poi:

$$e^{g(x)} = h(x),$$

$h(x)$ potrà (cfr. art. 115) trasformarsi in una serie di potenze convergente in tutto il piano, cioè sarà una funzione intera. Dopo ciò si ha (ivi):

$$h'(x) = h(x)\, g'(x),$$

e quindi:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{h'(x)}{h(x)},$$

ossia:

$$f(x)\,h'(x) - h(x)\,f'(x) = 0.$$

Moltiplicando per la funzione intera $\frac{1}{f^2(x)}$, si ha:

$$\frac{f(x)\,h'(x) - h(x)\,f'(x)}{f^2(x)} = 0.$$

Ora il primo membro è (art. 135) la derivata di $\frac{h(x)}{f(x)}$, donde segue (art. 108) che questo rapporto deve ridursi ad una costante:

$$\frac{h(x)}{f(x)} = C.$$

Si ha dunque:

$$f(x) = \frac{1}{C}\,h(x) = \frac{1}{C}\,e^{g(x)},$$

od anche, omettendo il fattore $\frac{1}{C}$ e sostituendo a $g(x)$ un'altra funzione $G(x)$ che ne differisce soltanto per una costante:

$$f(x) = e^{G(x)}.\ *$$

---

* Il ragionamento esposto si applica, senza variazione alcuna, ad una serie di potenze $P(x)$ convergente in un cerchio C e priva di radici entro di esso. Posto $\frac{P'(x)}{P(x)} = Q'(x)$, anche $Q'(x)$, e quindi anche $Q(x)$, è convergente entro C, e si ha, a meno d'un fattore costante:

$$P(x) = e^{Q(x)}.$$

Cioè: *Ogni funzione intera priva di radici è un esponenziale il cui esponente è una funzione intera.*

166. Stabilita l'esistenza di funzioni intere prive di radici, dobbiamo studiare quelle che ammettono radici, ed esaminare se, e sino a qual punto, la conoscenza delle radici d'una funzione intera permetta di assegnare la forma analitica di essa.

È noto che, date le radici d'un polinomio, questo è determinato a meno d'un fattore costante. Nel caso delle funzioni intere trascendenti possiamo dire sin d'ora che l'indeterminazione è assai più grande; giacchè tutte le funzioni intere che differiscono tra loro per un *fattore esponenziale* (così chiameremo un'espressione della forma $e^{g(x)}$, in cui $g(x)$ è una funzione intera) hanno le stesse radici. Vedremo però che a ciò si limita tutta la indeterminazione; che cioè una funzione intera, di cui sono date le radici, è determinata a meno *soltanto* d'un fattore esponenziale.

167. Cominciamo da un caso semplice; quello in cui il numero delle radici è finito. Sieno esse $c_1, c_2, \ldots, c_n$, intendendo che in questa serie ciascuna radice figuri tante volte quante unità contiene il suo ordine, sicchè le c non sono tutte necessariamente differenti.

Sia $f(x)$ la funzione cercata, e pongasi:

$$\varphi(x) = (x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n).$$

Il rapporto $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ è una funzione intera priva di radici. Anzitutto in un punto d diverso dai punti

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ $f(x)$ è diversa da zero ed $\frac{1}{\varphi(x)}$ è regolare e diversa da zero, sicchè anche $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ è regolare e diversa da zero. Sia ora c_1 uno zero d'ordine r, sicchè $c_1 = c_2 = \ldots = c_r$; si avrà:

$$\varphi(x) = (x - c_1)^r (x - c_{r+1})(x - c_{r+2}) \ldots (x - c_n) = \\ = (x - c_1)^r \psi(x),$$

dove $\psi(x)$ è un polinomio che non s'annulla in c_1, — inoltre (art. 139) nell'intorno di c_1:

$$f(x) = (x - c_1)^r P(x - c_1),$$

dove $P(x - c_1)$ è una serie di potenze di $x - c_1$ convergente in tutto il piano che non s'annulla nel punto c_1. Ne segue:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = P(x - c_1) \frac{1}{\psi(x)},$$

ed il secondo membro è regolare e non s'annulla nel punto c_1. Analogamente per gli altri punti c.

Si avrà pertanto (art. 165):

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = e^{g(x)},$$

dove $g(x)$ denota una funzione intera, che d'altronde può essere qualunque, e quindi:

$$f(x) = e^{g(x)} \varphi(x) = e^{g(x)} (x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n),$$

o, ciò che è lo stesso:

$$f(x) = e^{g(x)} \left(1 - \frac{x}{c_1}\right)\left(1 - \frac{x}{c_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{c_n}\right).$$

168. Abbia ora la funzione intera $f(x)$ infinite radici. Queste formeranno un insieme isolato (art. 127), e quindi numerabile (art. 41), il quale avrà per unico punto limite il punto all'infinito (art. 127); e però ogni campo finito conterrà soltanto un numero finito di esse (art. 5). Potremo pertanto ordinare le radici in serie semplice come segue: Prendiamo una successione di quantità positive indefinitamente crescenti $\rho_1, \rho_2, \ldots$ Vi sarà un numero finito di radici di modulo $\leq \rho_1$; disponiamole in ordine di modulo crescente, restando arbitrario l'ordine relativo di quelle aventi egual modulo. Sieno tali radici $c_1, c_2, \ldots, c_{r_1}$. Vi sarà poi un numero finito di radici di modulo $> \rho_1$ e $\leq \rho_2$; le disporremo come le precedenti, e le indicheremo con $c_{r_1+1}, c_{r_1+2}, \ldots, c_{r_2}$. E così di seguito. Otterremo per tal modo le radici disposte in ordine crescente, od almeno non decrescente, di modulo; avremo cioè una serie:

$$c_1, c_2, \ldots,$$

dove:

$$|c_1| \leq |c_2| \leq \ldots, \lim_{h=\infty} |c_h| = \infty.$$

Anche qui supporremo ogni radice ripetuta tante volte quante unità contiene il suo ordine.

169. Ciò premesso, è possibile seguire anche nel caso attuale il metodo sviluppato nell'art. 167? Se ciò fosse, la soluzione del nostro problema sarebbe data dalla formola:

$$f(x) = e^{g(x)} \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right). \qquad (1)$$

Ma si presenta subito una grave difficoltà: il prodotto infinito che figura nel secondo membro in generale non è convergente.

Il mezzo per vincere tale difficoltà fu suggerito a Weierstrass dallo studio di una speciale funzione intera, la reciproca dell'*integrale euleriano di 2ª specie.* Sin dal 1856 * egli trovò per questa funzione il seguente sviluppo in prodotto infinito:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{h}\right)\left(\frac{h}{h+1}\right)^x =$$
$$= x \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{h}\right) e^{-x \lg \frac{h+1}{h}}.$$

Considerando questa formola, egli osservò che il prodotto infinito:

$$\prod_{h=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{h}\right),$$

il quale parrebbe poter rappresentare la funzione, perchè ogni suo fattore s'annulla in uno zero di essa, non è d'alcun uso, perchè divergente per tutti i valori di x, ma che esso può tuttavia convertirsi in un prodotto convergente per tutti i valori di x moltiplicando ciascun fattore per un esponenziale avente per esponente una funzione lineare. Di qui egli fu condotto a chiedersi se il prodotto (1), il quale in generale non è convergente, non potesse *in tutti i casi* rendersi tale

* *Ueber die Theorie der analytischen Facultäten*, Journ. für die reine und angew. Math., T. 51, p. 1-60; Abhandlungen aus der Functionenlehre, Berlin 1886, p. 183-260.

moltiplicandone i fattori per esponenziali opportunamente scelti; e riuscì a dimostrare * che effettivamente ciò è sempre possibile.

È da notarsi però che, sin dal 1860, Betti ** era giunto a questo risultato in due casi particolari importantissimi, che svilupperemo più innanzi (art. 173, 174); e che, come ha mostrato Dini, *** il metodo da lui usato avrebbe potuto estendersi, senza alcuna difficoltà, al caso generale.

170. Il risultato fondamentale accennato nell'art. prec. può enunciarsi come segue:

Dato un insieme numerabile di punti $c_1, c_2, \ldots,$ *diversi dall'origine, e tutti distinti o no tra loro, tali che:*

$$|c_1| \leq |c_2| \leq \ldots, \lim_{h=\infty} |c_h| = \infty,$$

può trovarsi in infiniti modi una successione di numeri interi positivi non decrescenti $r_1, r_2, \ldots,$ *tali che:*

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left| \frac{x}{c_h} \right|^{r_h+1} \tag{1}$$

sia convergente per ogni valore finito di x*; e la più generale funzione intera che s'annulla nei punti* $c_1, c_2, \ldots,$ *ed ha inoltre uno zero d'ordine* m *nell'origine, è data da:*

$$f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}}, \tag{2}$$

---

* Weierstrass 217.
** Betti 11.
*** Dini 47.

dove $g(x)$ è una funzione intera qualunque (teorema di Weierstrass).

Se si prende $r_h = h - 1$, la (1) diviene:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left| \frac{x}{c_h} \right|^h ;$$

e questa è convergente, perchè la radice h-esima del suo termine h-esimo tende a zero al tendere di h ad infinito, qualunque sia x. La successione dei *numeri di convergenza* r_h può poi variarsi in infiniti modi, sia mutando comunque il valore d'un numero finito dei suoi elementi, sia aumentando il valore d'un numero finito od infinito di essi.

Ciò premesso, si consideri la funzione:

$$P(x) = 1 - x,$$

che è una serie di potenze ridotta ad un polinomio e priva di radici entro il cerchio di raggio 1 col centro nell'origine. Si avrà:

$$P'(x) = -1,$$

quindi:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{-1}{1-x} = -\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1},$$

e di qui (art. 165, nota), per $|x| < 1$, a meno di un fattore costante, che si riconosce subito essere l'unità:

$$1 - x = P(x) = e^{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}} . \qquad (3)$$

Poniamo ora:

$$E_h(x) = \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}}; \tag{4}$$

avremo per la (3) per $|x| < |c_h|$:

$$E_h(x) = e^{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k c_h^k}} e^{\sum_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

ossia:

$$E_h(x) = e^{-\sum_{k=r_h+1}^{\infty} \frac{x^k}{k c_h^k}}.$$

Sia n un numero qualunque, e consideriamo la somma doppia:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \sum_{k=r_h+1}^{\infty} \frac{x^k}{k\, c_h^{\,k}}.$$

Per $\left|\frac{x}{c_h}\right| < \lambda < 1$ si ha:

$$\sum_{k=r_h+1}^{\infty} \left|\frac{x}{c_h}\right|^k = \frac{\left|\frac{x}{c_h}\right|^{r_h+1}}{1 - \left|\frac{x}{c_h}\right|} < \frac{1}{1-\lambda} \left|\frac{x}{c_h}\right|^{r_h+1},$$

quindi, a maggior ragione:

$$\sum_{k=r_h+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left|\frac{x}{c_h}\right|^k < \frac{1}{1-\lambda} \left|\frac{x}{c_h}\right|^{r_h+1},$$

e, per $\left| \frac{x}{c_{n+1}} \right| < \lambda < 1$:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \sum_{k=r_h+1}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k\, c_h{}^k} \right| < \frac{1}{1-\lambda} \sum_{h=n+1}^{\infty} \left| \frac{x}{c_h} \right|^{r_h+1},$$

da cui:

$$\left| \sum_{h=n+1}^{\infty} \sum_{k=r_h+1}^{\infty} \frac{x^k}{k\, c_h{}^k} \right| < \frac{1}{1-\lambda} \sum_{h=n+1}^{\infty} \left| \frac{x}{c_h} \right|^{r_h+1}.$$

La serie del secondo membro converge per ogni valore finito di x, e quindi è certamente equiconvergente in ogni cerchio di raggio minore di $\lambda \mid c_{n+1} \mid$ col centro nell'origine (qualunque sieno λ e c_{n+1}), quindi lo stesso potrà dirsi della serie di serie di potenze che figura nel primo membro, la quale perciò (art. 105) potrà trasformarsi in un'unica serie di potenze convergente entro il cerchio accennato, o, ciò che è lo stesso, entro il cerchio di raggio $|c_{n+1}|$. Indichiamo con $P_{n+1}(x)$ questa serie di potenze; avremo:

$$\prod_{h=n+1}^{\infty} E_h(x) = e^{-P_{n+1}(x)} \tag{5}$$

e quindi:

$$e^{-P_1(x)} = e^{-P_{n+1}(x)} \prod_{h=1}^{n} E_h(x). \tag{6}$$

Ora le $E_h(x)$ sono, come risulta dalla loro espressione (4), funzioni intere; $e^{-P_{n+1}(x)}$ è convergente, come $P_{n+1}(x)$, per $\mid x \mid < c_{n+1}$. Ne segue che $e^{-P_1(x)}$ è convergente per $\mid x \mid < \mid c_{n+1} \mid$. Ma,

preso un valore qualunque di x, noi possiamo sempre trovare un numero n tale che sia:

$$|x| < |c_{n+1}|;$$

onde si può concludere che $e^{-P_1(x)}$ è una funzione intera. Essa, per $|x| < |c_{n+1}|$, non ha altri zeri che i punti $c_1, c_2, \ldots, c_n$; ciò risulta dalla (6) osservando che $E_h(x)$ si annulla nel solo punto c_h, e che $e^{-P_{n+1}(x)}$, per $|x| < |c_{n+1}|$, non è mai nulla. Ne segue che la funzione intera si annulla nei punti $c_1, c_2, \ldots$, e soltanto in questi punti. Volendo costruire una funzione la quale abbia inoltre uno zero d'ordine m nell'origine, si dovrà moltiplicare per x^m; e volendo avere la più generale funzione avente gli zeri dati, potrà stabilirsi come nell'art. 167 che si deve aggiungere un fattore esponenziale. Tenuto conto adunque che (v. eq. (5)):

$$\prod_{h=1}^{\infty} E_h(x) = e^{-P_1(x)},$$

si ha infine per la funzione cercata:

$$f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{\infty} E_h(x) =$$

$$= e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

che è la (2).

I fattori $E_h(x)$ diconsi *fattori primi* o *primari*.

171. Le radici $c_1, c_2, \ldots$ d'una funzione intera possono essere tali, che non occorra prendere

i numeri $r_1, r_2, \ldots$ indefinitamente crescenti per rendere convergente la serie (1) dell'art. 170, che cioè esista un numero intero, nullo o positivo p per cui $\sum_{h=1}^{\infty} \left| \frac{x}{c_h} \right|^{p+1}$, o, ciò che è lo stesso:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|c_h|^{p+1}},$$

sia convergente. In tal caso il più piccolo numero p che soddisfa alla condizione enunciata si chiama il *genere* * della funzione, e la funzione stessa si dice *di prima classe;* mentre si dice *di seconda classe* se non esiste alcun numero avente la proprietà anzidetta.

Una funzione di prima classe e di genere p ha la forma:

$$f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}}. \qquad (1)$$

Il fattore $e^{g(x)}$ si chiama *fattore esponenziale esterno.* Se questo manca, la funzione si dice *semplice.* Se esso è un polinomio di grado non superiore a p, diremo che $f(x)$ è una funzione *di rango p.*

---

* LAGUERRE, e dietro di lui POINCARÉ e BOREL, chiamano *genere* ciò che noi chiamiamo *rango.* PUZYNA (178) dice *genere (Rang)* d'una funzione $f(x)$ il minimo numero intero t che soddisfa alla relazione:

$$\lim_{x=0} \frac{f'(x)}{x^{t+1} f(x)} = \infty.$$

Ad una funzione di rango p può sempre darsi l'*apparenza* d'una funzione di rango maggiore di p. Supposto infatti che nella (1) $g(x)$ sia un polinomio di grado non superiore a p, può scriversi:

$$f(x) = e^{g(x) - \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=p+1}^{p+r} \frac{x^k}{k c_h^k}} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p+r} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

dove l'esponente esterno di e è un polinomio di grado $p + r$.

172. Prima di applicare ad alcuni casi speciali la formola trovata, vogliamo dedurne altre che ci saranno utili in seguito.

Posto:

$$\varphi(x) = \prod_{h=1}^{\infty} E_h(x),$$

può scriversi, qualunque sia n:

$$\varphi(x) = \prod_{h=1}^{n} E_h(x) \,.\, e^{-P_{n+1}(x)}, \tag{1}$$

dove $P_{n+1}(x)$ è la serie di potenze risultante dall'applicazione del lemma di Weierstrass alla somma doppia:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \sum_{k=r_h+1}^{\infty} \frac{x^k}{k\, c_h{}^k}\,. \tag{2}$$

Facciamo:

$$P_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \frac{x^k}{k}.\ *$$

* Più esattamente, il minimo valore di k è $r_{n+1} + 1$; ma noi possiamo scrivere per semplicità come valore minimo $k = 1$, non escludendo che alcune delle A_{nk} possano essere nulle.

Se ripetiamo per la serie doppia:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \sum_{k=r_h+1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{c_h{}^k} \tag{3}$$

il ragionamento fatto per la (2), vedremo che anche ad essa è applicabile il lemma di Weierstrass, e di più che la sua espressione in serie di potenze è:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\, x^{k-1},$$

ossia $P'_{n+1}(x)$. Ora la serie doppia (3) non è altro che $-\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{E'_h(x)}{E_h(x)}$, sicchè si ha:

$$-\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{E'_h(x)}{E_h(x)} = P'_{n+1}(x). \tag{4}$$

D'altra parte segue dalla (1) (art. 134, 136):

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum_{h=1}^{n} \frac{E'_h(x)}{E_h(x)} - P'_{n+1}(x),$$

quindi, per la (4):

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{E'_h(x)}{E_h(x)}.$$

Nel caso nostro dunque la derivata ha la stessa espressione che avrebbe se il numero dei fattori fosse finito.

Ricordando l'espressione di $\frac{E'_h(x)}{E_h(x)}$, si ha:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{r_h}}{c_h{}^{r_h}(x - c_h)} = -\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=r_h+1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{c_h{}^k}. \tag{5}$$

È facile stabilire, mediante ripetuta applicazione del lemma di Weierstrass, che l'espressione precedente si può derivare termine a termine quante volte si vuole.

173. Faremo una prima applicazione del teorema di Weierstrass, cercando lo sviluppo in prodotto infinito della funzione sen x, sviluppo dovuto ad Eulero,* il quale però l'ottenne con un metodo non del tutto rigoroso.

Si dimostra nell'Algebra, che le funzioni trigonometriche sen x, cos x, dove x è una quantità reale, possono esprimersi mediante le serie infinite, convergenti per tutti i valori finiti di x:

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{x^{2h+1}}{2h+1!}, \quad (1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{x^{2h}}{2h!}. \quad (2)$$

Le proprietà fondamentali della funzione sen x sono:

a) Di essere dispari:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x; \quad (3)$$

b) Di annullarsi per $x = k\pi$, dove k rappresenta qualunque numero intero positivo, nullo o negativo:

$$\operatorname{sen} k\pi = 0; \quad (4)$$

c) Di essere periodica, col periodo 2π:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x. \quad (5)$$

---

* *Introductio in analysin infinitorum*, P. I, § 158.

Invece $\cos x$ è pari e si annulla per:

$$x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi;$$

essa ha pure il periodo 2π.

Supponendo ora che x rappresenti una variabile complessa, noi prenderemo le serie (1), (2), che sono assolutamente convergenti anche per ogni valore complesso di x, come definizione di due funzioni intere, che indicheremo ancora con $\operatorname{sen} x$, $\cos x$.

Dall'esame delle due serie, e dal confronto tra esse e con quella che rappresenta e^x, risulta immediatamente:

Che $\cos x$ è la derivata di $\operatorname{sen} x$;

Che $-\operatorname{sen} x$ è la derivata di $\cos x$;

Che per x reale $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ sono reali, e per x puramente imaginario $\operatorname{sen} x$ è puramente imaginario e $\cos x$ reale;

Che:

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \operatorname{sen} x. \tag{6}$$

Segue di qui (art. 114):

$$\cos(x \pm y) + i \operatorname{sen}(x \pm y) = e^{i(x \pm y)} =$$
$$= e^{ix} e^{\pm iy} = (\cos x + i \operatorname{sen} x)(\cos y \pm i \operatorname{sen} y) =$$
$$= \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + i(\operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y),$$

e analogamente:

$$\cos(x \pm y) - i \operatorname{sen}(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$
$$- i(\operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y),$$

donde:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(x \pm y) &= \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

Prendiamo nelle (7) il segno superiore, poniamo $-x$ in luogo di x e facciamo $y = \frac{\pi}{2}$. — Tenuto conto che $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, avremo:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad (8)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x. \quad (9)$$

Facendo invece nella prima delle (7):

$$y = \frac{\pi}{2} - x,$$

e prendendo ancora il segno superiore, si ha, tenuto conto delle (8), (9):

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x,$$

ossia:

$$1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x. \quad (10)$$

Dopo ciò segue dalla (6), per v reale:

$$| e^{iv} | = 1, \quad (11)$$

e quindi per u, v reali:

$$| e^{u+iv} | = e^{u}. \tag{12}$$

La funzione intera $\operatorname{sen} x$ conserva le proprietà *a)*, *b)*, *c)*; resta solo ad esaminare se essa si annulla per qualche valore complesso di x.

Anzitutto $\operatorname{sen} x$ non può annullarsi per alcun valore puramente imaginario di x; infatti, posto $x = i\,t$, dove t denota una quantità reale, si ha:

$$\operatorname{sen} i\,t = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h\, i^{2h+1} \frac{t^{2h+1}}{2h+1\,!} = i\,t \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^{2h}}{2h+1\,!},$$

e quest'ultima serie ha valore essenzialmente positivo. Un calcolo analogo dimostra che anche $\cos i\,t$ non può essere nullo.

Supponiamo ora:

$$\operatorname{sen}(u + i\,v) = 0,$$

dove u e v sono reali, e $v \neq 0$. Per la prima delle (7) potrà scriversi:

$$\operatorname{sen} u \cos i\,v + \cos u \operatorname{sen} i\,v = 0;$$

ora $\operatorname{sen} u$, $\cos u$ e $\cos i\,v$ sono reali, e $\operatorname{sen} i\,v$ è puramente imaginario, quindi dovrà essere:

$$\operatorname{sen} u \cos i\,v = 0, \qquad \cos u \operatorname{sen} i\,v = 0,$$

ed essendo $\operatorname{sen} i\,v \neq 0$, $\cos i\,v \neq 0$, ne segue:

$$\operatorname{sen} u = \cos u = 0,$$

che è in contraddizione colla (10).

Le radici della funzione $\operatorname{sen} x$ sono adunque:

$$0, \quad \pm\pi, \quad \pm 2\pi, \quad \pm 3\pi, \ldots,$$

e la successione, ordinata in senso crescente, dei moduli delle radici diverse da zero è:

$$\pi, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad 3\pi, \ldots$$

Vediamo se la funzione considerata è della prima classe, cioè se esiste un numero p tale che:

$$\frac{1}{\pi^{p+1}} + \frac{1}{\pi^{p+1}} + \frac{1}{(2\pi)^{p+1}} + \frac{1}{(2\pi)^{p+1}} + \ldots$$

sia convergente. Questa serie può anche scriversi:

$$\frac{2}{\pi^{p+1}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{p+1}}.$$

Ora è noto * che la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{p+1}}$ diverge per $p=0$ e converge per $p>0$; il minimo valore intero di p che la rende convergente sarà dunque $p=1$, e potremo dire che $\operatorname{sen} x$ è una funzione intera della *prima* classe e di genere *uno*. La sua espressione sarà data pertanto da:

$$\operatorname{sen} x = e^{g(x)}\, x \prod_{h=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{\pi h}\right) e^{\frac{x}{\pi h}}, \qquad (13)$$

dove $g(x)$ è una funzione intera da determinarsi, e l'apice apposto al segno Π indica che nel prodotto manca il fattore corrispondente ad $h=0$. Essendo il prodotto del secondo membro assolutamente convergente, possiamo disporne i fattori in qualunque modo, e in particolare possiamo riu-

---

* V. Cesàro, *Corso di analisi algebrica*, p. 118, 142.

nire due a due quelli corrispondenti a valori eguali e di segno contrario di h, eseguendone anche il prodotto. Abbiamo allora:

$$\operatorname{sen} x = e^{g(x)} x \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 h^2}\right). \tag{14}$$

Resta da determinarsi la funzione $g(x)$. Perciò si ha dalla (13), per la (5) dell'art. prec.:

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = g'(x) + \frac{1}{x} + \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \frac{x}{\pi h (x - \pi h)} =$$

$$= g'(x) + \frac{1}{x} + \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{x - \pi h} + \frac{1}{\pi h}\right], \tag{15}$$

dove l'apice ha lo stesso significato di prima; od ancora:

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = g'(x) + \frac{1}{x} +$$

$$+ \frac{x}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{h(x - \pi h)} + \frac{1}{-h(x + \pi h)}\right] =$$

$$= g'(x) + \frac{1}{x} + \frac{x}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{2\pi h}{h(x^2 - \pi^2 h^2)} =$$

$$= g'(x) + \frac{1}{x} + 2x \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - \pi^2 h^2},$$

che può anche scriversi:

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = g'(x) + \frac{1}{x} + x \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{x^2 - \pi^2 h^2},$$

oppure, comprendendo nella sommatoria il termine

$\frac{1}{x}$ e togliendo quindi l'apice:

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = g'(x) + x \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - \pi^2 h^2},$$

da cui:

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - x \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - \pi^2 h^2}. \qquad (16)$$

Segue di qui immediatamente, ricordando che $\operatorname{sen} x$ è una funzione dispari e $\cos x$ una funzione pari:

$$g'(-x) = -g'(x),$$

e quindi $g'(0) = 0$; sicchè $g'(x)$ sarà il prodotto di x per una funzione intera $k(x)$:

$$g'(x) = x\, k(x).$$

Le (15), (16) diverranno:

$$k(x) = \frac{\cos x}{x \operatorname{sen} x} - \frac{1}{x^2} - \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\pi h (x - \pi h)} =$$

$$= \frac{\cos x}{x \operatorname{sen} x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{h(x - \pi h)} - \frac{1}{h(x + \pi h)} \right]$$

$$= \frac{\cos x}{x \operatorname{sen} x} - \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - \pi^2 h^2}. \qquad (17)$$

Poniamo $x = u + i v$, e facciamo crescere v all'infinito per valori positivi; avremo (v. eq. (12)):

$$\lim_{v=+\infty} \frac{\cos(u + i v)}{\operatorname{sen}(u + i v)} = \lim_{v=+\infty} \frac{i\,(e^{iu-v} + e^{-iu+v})}{e^{iu-v} - e^{-iu+v}} = -i.$$

Se invece facciamo crescere v all'infinito per valori negativi, avremo:

$$\lim_{v=-\infty} \frac{\cos(u+iv)}{\operatorname{sen}(u+iv)} = i.$$

Si avrà quindi in ambi i casi:

$$\lim_{v=\pm\infty} \frac{\cos(u+iv)}{(u+iv)\operatorname{sen}(u+iv)} = 0. \qquad (18)$$

D'altra parte:

$$\left| \frac{1}{h(u+iv-\pi h)} \right| = \frac{1}{h\sqrt{(\pi h-u)^2+v^2}},$$

e poichè, essendo a, b due quantità reali, si ha:

$$a^2+b^2 \geqq 2ab,$$

ne segue:

$$\left| \frac{1}{h(u+iv-\pi h)} \right| \leqq \frac{1}{h\sqrt{2|v||\pi h-u|}}.$$

Ma, se $u<0$, si ha $\pi h-u>\pi h>h$; se $u>0$, può prendersi sempre h abbastanza grande perchè sia $\pi h-u>h$; onde si ha, in ogni caso, per h maggiore di un certo numero finito n:

$$\left| \frac{1}{h(u+iv-\pi h)} \right| \leqq \frac{1}{\sqrt{2|v|}\,h^{\frac{3}{2}}}.$$

Analogamente:

$$\left| \frac{1}{h(u+iv+\pi h)} \right| \leqq \frac{1}{\sqrt{2|v|}\,h^{\frac{3}{2}}};$$

e quindi:

$$\left|\frac{1}{h(u+iv-\pi h)}-\frac{1}{h(u+iv+\pi h)}\right|\leq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|v|}\,h^{\frac{3}{2}}},$$

da cui:

$$\left|\sum_{h=n+1}^{\infty}\left[\frac{1}{h(u+iv-\pi h)}-\frac{1}{h(u+iv+\pi h)}\right]\right|\leq$$

$$\leq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|v|}}\sum_{h=n+1}^{\infty}\frac{1}{h^{\frac{3}{2}}}.$$

Ma la serie del secondo membro è convergente (v. sopra), quindi:

$$\lim_{v=\pm\infty}\left|\sum_{h=n+1}^{\infty}\left[\frac{1}{h(u+iv-\pi h)}-\frac{1}{h(u+iv+\pi h)}\right]\right|=0. \quad (19)$$

È chiaro poi che tendono a zero anche i primi n termini della somma.

Dopo ciò segue dalla (17), in virtù delle (18), (19):

$$\lim_{v=\pm\infty} k(u+iv)=0. \quad (20)$$

Scriviamo ora la (15) come segue:

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}=g'(x)+\sum_{h=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{x-\pi h}+\theta_h\right],$$

dove $\theta_h=\frac{1}{\pi h}$ per $h\neq 0$ e $\theta_h=0$ per $h=0$. Po-

nendo $x + 2\pi$ in luogo di x, ne ricaviamo:

$$g'(x+2\pi) = \frac{\cos(x+2\pi)}{\operatorname{sen}(x+2\pi)} -$$

$$- \sum_{h=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{x+2\pi-\pi h} + \theta_h \right],$$

ossia, cambiando h in $h+2$ e ricordando che $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ hanno il periodo 2π:

$$g'(x+2\pi) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \sum_{h=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{x-\pi h} + \theta_{h+2} \right].$$

La sommatoria può anche scriversi:

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{x-\pi h} + \theta_h \right],$$

giacchè con ciò non si fa che accoppiare diversamente da prima le infinite quantità $\frac{1}{x-\pi h}$ colle infinite quantità θ_h, senza alterarne il valore nè toglierne od aggiungerne alcuna. Si ha pertanto:

$$g'(x+2\pi) = g'(x),$$

ossia:

$$(x+2\pi)\, k(x+2\pi) = x\, k(x),$$

od ancora:

$$k(x \pm 2\pi) = \frac{x}{x \pm 2\pi}\, k(x). \qquad (21)$$

Supposto dunque nella (20) $|u| < 2\pi$, risulta dalla (21) che essa sussiste per $|u| < 4\pi$, per

$|u| < 6\pi$, ecc. Cioè può scriversi:

$$\lim_{x=\infty} k(x) = 0;$$

e di qui può dedursi, col ragionamento dell'articolo 137, che $k(x)$ è una costante, la quale è necessariamente nulla. Ne segue che $g'(x)$ è pure nulla, e quindi che $g(x)$, e per conseguenza $e^{g(x)}$, è costante. Indicandone il valore con C, si ha dalla (13):

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = C \prod_{h=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{\pi h}\right) e^{\frac{x}{\pi h}},$$

e quindi:

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = C.$$

Ma dalla (1) segue che questo limite è 1; quindi $C = 1$, e:

$$\operatorname{sen} x = x \prod_{h=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{\pi h}\right) e^{\frac{x}{\pi h}} = x \prod_{h=1}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 h^2}\right).$$

174. Come secondo esempio, costruiremo la funzione intera σx * di cui Weierstrass fece la base della teoria delle funzioni ellittiche. Essa ha le proprietà seguenti:

a) È dispari;

---

* Scriveremo con WEIERSTRASS σx, ζx, $p x$, contrariamente all'uso comune di porre tra parentesi gli argomenti delle funzioni.

b) Ha le radici semplici:

$$2\,m\,\omega_1 + 2\,n\,\omega_3,$$

dove m ed n possono prendere tutti i valori interi positivi, nulli o negativi, ed ω_1, ω_3 sono due quantità il cui rapporto non è reale;

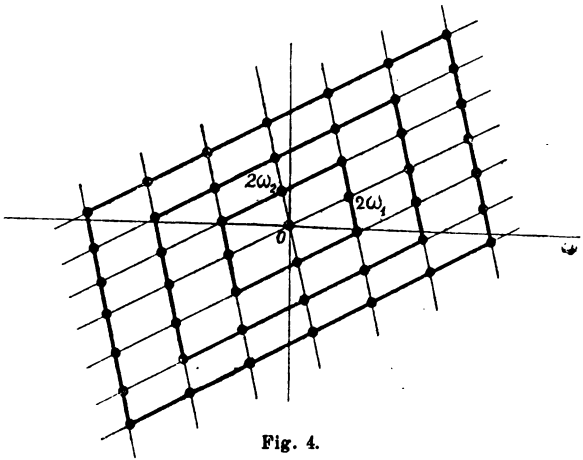


Fig. 4.

c) La sua derivata prima ha il valore 1 nell'origine, e la sua derivata terza s'annulla nel punto stesso; *

d) Essa soddisfa identicamente alle seguenti relazioni, dove η_1, η_3 sono due costanti dipendenti da ω_1, ω_3:

$$\sigma(x + 2\,\omega_1) = -\,e^{2\eta_1 x}\,\sigma\,x,\quad \sigma(x + 2\,\omega_3) = -\,e^{2\eta_3 x}\,\sigma\,x. \quad (1)$$

* È quasi inutile rammentare che tutte le derivate d'ordine pari di $\sigma\,x$, essendo funzioni dispari, s'annullano nell'origine.

Vediamo anzitutto se la σx è una funzione della prima classe.

Se si descrivono i parallelogrammi aventi rispettivamente i vertici $\pm 2\omega_1 \pm 2\omega_3$, $\pm 4\omega_1 \pm 4\omega_3$, $\pm 6\omega_1 \pm 6\omega_3$, ecc., tutte le radici della σx diverse da zero si troveranno sui perimetri di questi parallelogrammi, e precisamente 8 su quello del primo π_1, 16 su quello del secondo π_2, 24 su quello del terzo π_3, ecc. Indichiamo le prime con a_{11}, $a_{12}, \ldots, a_{18}$; le seconde con $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2,16}$; le terze con $a_{3,1}, a_{3,2}, \ldots, a_{3,24}$, ecc. Detta M la massima, m la minima distanza dell'origine dal perimetro di π_1, avremo per tutti i valori che può prendere r nelle singole formole:

$$\begin{aligned} M &\geqq |\, a_{1r} \,| \geqq m, \\ 2M &\geqq |\, a_{2r} \,| \geqq 2m, \\ 3M &\geqq |\, a_{3r} \,| \geqq 3m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

quindi in generale, indicando con α un numero positivo qualunque e con k un numero intero positivo:

$$\frac{1}{k^\alpha M^\alpha} \leqq \frac{1}{|\, a_{kr} \,|^\alpha} \leqq \frac{1}{k^\alpha m^\alpha},$$

e sommando da $r=1$ ad $r=8k$:

$$\frac{8k}{k^\alpha M^\alpha} \leqq \sum_{r=1}^{8k} \frac{1}{|\, a_{kr} \,|^\alpha} \leqq \frac{8k}{k^\alpha m^\alpha},$$

ossia:

$$\frac{8}{M^\alpha} \frac{1}{k^{\alpha-1}} \leqq \sum_{r=1}^{8k} \frac{1}{|\, a_{kr} \,|^\alpha} \leqq \frac{8}{m^\alpha} \frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

Se facciamo variare k da 1 ad ∞ e sommiamo le relazioni corrispondenti, avremo come termine di mezzo la somma delle potenze $-\alpha$ dei moduli delle radici, somma che colla notazione usuale potremo scrivere $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|c_h|^\alpha}$. Otterremo dunque:

$$\frac{8}{M^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}} \leq \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|c_h|^\alpha} \leq \frac{8}{m^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

Ma, come si è ricordato nell'artic. precedente, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$ è convergente sempre e soltanto quando $\alpha - 1 > 1$, cioè quando $\alpha > 2$, quindi lo stesso potrà dirsi di $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|c_h|^\alpha}$. Dunque il più piccolo numero intero p che rende convergente $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|c_h|^{p+1}}$ è 2; cioè la σx è una funzione di *prima* classe e di genere *due*.

Ponendo per brevità:

$$2 m \omega_1 + 2 n \omega_3 = c_{mn},$$

si avrà pertanto:

$$\sigma x = e^{g(x)} x \Pi' \left(1 - \frac{x}{c_{mn}}\right) e^{\frac{x}{c_{mn}} + \frac{x^2}{2c^2_{mn}}}, \qquad (2)$$

dove $g(x)$ è una funzione intera da determinarsi, e l'apice apposto al segno Π vale ad indicare che le m, n possono prendere tutti i valori interi da $-\infty$ a $+\infty$, *esclusa però la combinazione* $m = 0$, $n = 0$.

Prima di procedere alla determinazione della $g(x)$, facciamo una osservazione. Posto, come fa Weierstrass:

$$\frac{\sigma' x}{\sigma x} = \zeta x, \qquad -\zeta' x = p x, \text{*}$$

si ha dalle (1) derivando e dividendo per le (1) stesse:

$$\zeta(x + 2\omega_h) = \zeta x + 2\eta_h \qquad (h = 1, 3), \qquad (3)$$

e di qui derivando ancora:

$$\left.\begin{aligned} p(x + 2\omega_h) &= p\,x \\ p'(x + 2\omega_h) &= p'x \end{aligned}\right\} \quad (h = 1, 3). \qquad (4)$$

Inoltre è facile vedere che ζx e $p' x$ sono funzioni dispari, e $p x$ è funzione pari.

Dopo ciò si ha dalla (2) (art. 172):

$$\zeta x = g'(x) + \frac{1}{x} + \Sigma' \left[\frac{1}{x - c_{mn}} + \frac{1}{c_{mn}} + \frac{x}{c^2_{mn}}\right], \qquad (5)$$

$$-p x = g''(x) - \frac{1}{x^2} + \Sigma' \left[-\frac{1}{(x - c_{mn})^2} + \frac{1}{c^2_{mn}}\right], \qquad (6)$$

$$-p' x = g'''(x) + \frac{2}{x^3} + \Sigma' \frac{2}{(x - c_{mn})^3} =$$

$$= g'''(x) + 2\Sigma \frac{1}{(x - c_{mn})^3}, \qquad (7)$$

* Si noti che ζx e $p x$ non sono funzioni intere. Esse sono funzioni *meromorfe* (v. più innanzi), cioè non aventi a distanza finita altre singolarità che dei poli.

essendosi nell'ultima somma compreso anche il termine $\frac{2}{x^3}$ che corrisponde ad $m = n = 0$, e quindi tolto l'apice. Indicando per un istante questa somma con $S(x)$, è facile persuadersi che:

$$S(x + 2\omega_h) = S(x) \quad (h = 1, 3).$$

Infatti:

$$S(x + 2\omega_1) = \Sigma \frac{1}{(x + 2\omega_1 - c_{mn})^3} =$$

$$= \Sigma \frac{1}{[x - (2(m-1)\omega_1 + 2n\omega_3)]^3};$$

ma, variando m da $-\infty$ a $+\infty$, anche $m - 1$ varia tra gli stessi limiti, quindi può scriversi:

$$S(x + 2\omega_1) = \Sigma \frac{1}{[x - (2m\omega_1 + 2n\omega_3)]^3} = S(x).$$

Analogamente si dimostra che $S(x + 2\omega_3) = S(x)$.

Segue quindi dalla (7), tenuto conto della seconda delle (4):

$$g'''(x + 2\omega_h) = g'''(x) \qquad (h = 1, 3).$$

Se dunque si considera il reticolo di parallelogrammi, i cui vertici sono tutti i punti c_{mn}, reticolo che ricopre l'intero piano, la $g'''(x)$ riprenderà lo stesso valore nei punti omologhi dei vari parallelogrammi. Ma, poichè $g'''(x)$ è funzione intera, i moduli dei valori che essa prende entro un parallelogramma ammettono un massimo finito M; onde potrà conchiudersi che in qualunque parte finita del piano il modulo di $g'''(x)$ non supererà

mai M. Di qui si deduce in modo noto (cfr. articolo 137), che $g'''(x)$ è costante.

È da osservarsi inoltre che, essendo:

$$S(-x) = \Sigma \frac{1}{(-x - 2m\omega_1 - 2n\omega_3)^3} =$$

$$= -\Sigma \frac{1}{(x + 2m\omega_1 + 2n\omega_3)^3},$$

e potendosi porre $-m$, $-n$ in luogo di m, n (giacchè al variare di m, n da $-\infty$ a $+\infty$ anche $-m$, $-n$ variano tra gli stessi limiti), si ha:

$$S(-x) = -\Sigma \frac{1}{(x - 2m\omega_1 - 2n\omega_3)^3} = -S(x);$$

ricordando pertanto che $p'(-x) = -p'x$, si ha dalla (7) $g'''(-x) = -g'''(x)$.

Ma $g'''(x)$ è costante, quindi dovrà essere necessariamente nulla, e si avrà, indicando con A, B, C delle costanti da determinarsi:

$$g''(x) = 2A, \qquad g'(x) = 2Ax + B,$$
$$g(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

La (5) può scriversi:

$$\zeta x = g'(x) + \frac{1}{x} + x^2 \Sigma' \frac{1}{c^2_{mn}(x - c_{mn})}. \qquad (8)$$

Se si pone $-x$ in luogo di x, è facile vedere, ripetendo un ragionamento fatto poc'anzi, che la somma del secondo membro muta di segno, onde dovrà essere, tenuto conto che ζx è funzione dispari, $g'(-x) = -g'(x)$, ossia:

$$-2Ax + B = -(2Ax + B),$$

da cui $B=0$, e per conseguenza:

$$g'(x)=2Ax, \quad g(x)=Ax^2+C.$$

La (8) ci dà allora:

$$\frac{1}{x}\left[\zeta x-\frac{1}{x}\right]=2A+x\Sigma'\frac{1}{c^2_{mn}(x-c_{mn})}. \tag{9}$$

Noi porremo:

$$\frac{1}{x}\left[\zeta x-\frac{1}{x}\right]=\tau(x),$$

sicchè la (9) ci dà:

$$\tau(0)=2A. \tag{10}$$

Ora:

$$px=-\zeta' x=-\left(\frac{\sigma' x}{\sigma x}\right)'=-\frac{\sigma x.\sigma'' x-\sigma'^2 x}{\sigma^2 x}=$$

$$=\zeta^2 x-\frac{\sigma'' x}{\sigma x}=\frac{1}{x^2}+2\tau(x)+x^2\tau^2(x)-\frac{\sigma'' x}{\sigma x},$$

quindi, per la (6):

$$\frac{\sigma'' x}{\sigma x}=2\tau(x)+x^2\tau^2(x)+2A+$$

$$+\Sigma'\left[-\frac{1}{(x-c_{mn})^2}+\frac{1}{c^2_{mn}}\right]. \tag{11}$$

Il primo membro può scriversi:

$$\frac{\sigma''0+\frac{x}{1!}\sigma'''0+\frac{x^2}{2!}\sigma^{\text{IV}}0+\frac{x^3}{3!}\sigma^{\text{V}}0+\ldots}{\sigma 0+\frac{x}{1!}\sigma' 0+\frac{x^2}{2!}\sigma'' 0+\frac{x^3}{3!}\sigma''' 0+\ldots},$$

ossia, rammentando che:

$$\sigma 0 = \sigma'' 0 = \sigma''' 0 = \sigma^{\text{IV}} 0 = 0, \ \sigma' 0 = 1:$$

$$\frac{\frac{x^3}{3!}\sigma^{\text{V}} 0 + \ldots}{\frac{x}{1!} + \frac{x^5}{5!}\sigma^{\text{V}} 0 + \ldots} = \frac{\frac{x^2}{3!}\sigma^{\text{V}} 0 + \ldots}{1 + \frac{x^4}{5!}\sigma^{\text{V}} 0 + \ldots},$$

sicchè esso si annulla per $x = 0$; e però, tenuto conto della (10), si ha dalla (11):

$$0 = 4A,$$

ossia $A = 0$, e $g(x)$, e quindi $e^{g(x)}$, si riduce ad una costante. Indicando con D il valore di quest'ultima espressione, ed osservando che:

$$\frac{\sigma x}{x} = \frac{\sigma 0 + \frac{x}{1!}\sigma' 0 + \frac{x^5}{5!}\sigma^{\text{V}} 0 + \ldots}{x} =$$

$$= 1 + \frac{x^4}{5!}\sigma^{\text{V}} 0 + \ldots,$$

di modo che, per $x = 0$, $\frac{\sigma x}{x} = 1$, risulta dalla (2) che dev'essere $D = 1$. Si ha pertanto infine:

$$\sigma x = x \, \Pi' \left(1 - \frac{x}{c_{mn}}\right) e^{\frac{x}{c_{mn}} + \frac{x^2}{2c^2_{mn}}}.$$

175. Il teorema di Weierstrass è stato generalizzato in vari sensi. Ecco alcune delle ricerche a cui esso ha dato luogo:

Costruzione d'una funzione avente per punti singolari essenziali tutti i punti d'una circonferenza, e i cui posti-zero stanno nell'interno di questa ed hanno i loro punti limiti su di essa; *

Costruzione d'una funzione intera che in punti dati prende valori prestabiliti; **

Costruzione d'una *funzione biperiodica* con posti-zero dati avente un solo punto singolare essenziale in ciascun parallelogrammo primitivo; ***

Costruzione d'una *funzione uniforme d'un punto analitico* avente un solo punto singolare essenziale e infiniti posti-zero dati; ****

Deduzione del teorema di Weierstrass come caso particolare da un teorema più generale di quello (primitivo) di Mittag-Leffler (del quale si parlerà più innanzi). *****

Sta in qualche rapporto col teorema di Weierstrass, benchè non ne costituisca propriamente una generalizzazione, il problema seguente: ****** Dati due aggregati di valori reali o complessi A, B, di cui il primo numerabile, il secondo condensato in tutto il piano, costruire una funzione analitica esistente in tutto il piano e che per tutti i valori della variabile che appartengono all'insieme A prenda valori appartenenti all'insieme B.

---

* Picard 144.
** Gazzaniga 57.
*** Appell 2, Pascal 137, Cazzaniga 35, 37.
**** Appell 2.
***** Casorati 34.
****** Staeckel 192.

Studio delle funzioni intere.

176. Sotto questo titolo comprendiamo una serie di ricerche, che ebbero il primo impulso da Laguerre, e che sono più o meno direttamente informate all'idea di indagare se, e sino a qual punto, sussistano per le funzioni trascendenti intere le proprietà note dei polinomi. * Tali ricerche trovansi, in parte, esposte sistematicamente, oltre che in alcune delle opere già citate a pagina 62, in tre lavori di Bassi, ** Marx, *** e Pizzarello. ****

177. Una funzione semplice è completamente determinata quando ne sono date le radici; quindi i coefficienti del suo sviluppo in serie di potenze devono essere funzioni delle sole radici, ed anzi funzioni simmetriche (trascendenti). La determinazione della forma di tali funzioni non offre alcuna difficoltà.

Se nell'equazione (5) dell'artic. 172 si pone $r_h = p$, e:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h{}^k} = s_k \qquad (k > p),$$

---

* Bassi 8, 9, 10, Cesàro 39, 40, 41, Desaint 43, Hermite 75, Laguerre 90, 91, 92, 93, 94, Pincherle 152, De Sparre 190, Vivanti 202, 205, 208, 209, Witting 218.

** Bassi 8.

*** Marx 108.

**** Pizzarello 159.

e inoltre:

$$\varphi(x) = \prod_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}} = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

si ha:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots = -(1 + a_1 x + 2a_2 x^2 + \ldots)$$
$$(s_{p+1} x^p + s_{p+2} x^{p+1} + s_{p+3} x^{p+2} + \ldots),$$

da cui:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0,$$
$$(p+1) a_{p+1} = -s_{p+1},\ (p+2) a_{p+2} = -s_{p+2}, \ldots,$$
$$(2p+1) a_{2p+1} = -s_{2p+1},$$
$$(2p+2) a_{2p+2} = -s_{2p+2} - s_{p+1} a_{p+1},$$
$$(2p+3) a_{2p+3} =$$
$$= -s_{2p+3} - s_{p+2} a_{p+1} - s_{p+1} a_{p+2} - \ldots, \ldots,$$

equazioni che permettono di determinare successivamente tutte le a_h.

178. *Se alla variabile complessa x si applica una sostituzione lineare intera:*

$$x = Ay + B, \tag{1}$$

ogni funzione intera di rango p (art. 171) *si muta in una funzione della stessa natura.*

Sia:

$$f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}} \tag{2}$$

una funzione di rango p, sicchè $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p+1}}$ è asso-

lutamente convergente, $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h{}^p}$ non lo è, e $g(x)$ è un polinomio di grado non superiore a p. Mediante la sostituzione (1) la (2) si muta in una funzione intera $\varphi(y)$ di y, le cui radici saranno $\frac{c_h - B}{A}$ $(h = 1, 2, \ldots)$ e $-\frac{B}{A}$, le prime semplici, l'ultima m-upla. Possiamo dimostrare che delle serie:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{c_h - B}{A}\right)^{p+1}}, \qquad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{c_h - B}{A}\right)^{p}},$$

dove si deve ritenere escluso il termine r-esimo se fosse eventualmente $B = c_r$, la prima è assolutamente convergente, la seconda no.

Anzitutto invece di queste serie è indifferente considerare le altre:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(c_h - B)^{p+1}}, \qquad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(c_h - B)^{p}}.$$

Presa σ ad arbitrio, ma minore di 1, può sempre trovarsi un numero n tale, che per ogni $h > n$ sia:

$$\left| \frac{B}{c_h} \right| < \sigma;$$

si ha allora, per gli stessi valori di h:

$$|c_h|(1 - \sigma) < |c_h| - |B| \leq$$
$$\leq |c_h - B| \leq c_h| + |B| < |c_h|(1 + \sigma),$$

e quindi, designando con q un numero qualunque maggiore di n:

$$\sum_{h=n+1}^{q} \frac{1}{|c_h|^{p+1}} > (1-\sigma)^{p+1} \sum_{h=n+1}^{q} \frac{1}{|c_h - B|^{p+1}},$$

$$\sum_{h=n+1}^{q} \frac{1}{|c_h|^{p}} < (1+\sigma)^{p+1} \sum_{h=n+1}^{q} \frac{1}{|c_h - B|^{p}},$$

relazioni che dimostrano l'asserto.

La funzione $\varphi(y)$ è dunque di genere p, e però la sua espressione è:

$$e^{l(y)}\left(1+\frac{Ay}{B}\right)^m \prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{Ay}{c_h-B}\right)e^{\sum_{k=1}^{p}\frac{A^k y^k}{k(c_h-B)^k}}.$$

Si ha quindi:

$$e^{g(Ay+B)}(Ay+B)^m \prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{Ay+B}{c_h}\right)e^{\sum_{k=1}^{p}\frac{(Ay+B)^k}{kc_h^k}} =$$

$$= e^{l(y)}\left(1+\frac{Ay}{B}\right)^m \prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{Ay}{c_h-B}\right)e^{\sum_{k=1}^{p}\frac{A^k y^k}{k(c_h-B)^k}},$$

e però l'espressione:

$$B^m e^{g(Ay+B)-l(y)} \prod_{h=1}^{\infty}\frac{c_h-B}{c_h} e^{\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left[\frac{(Ay+B)^k}{c_h^k}-\frac{A^k y^k}{(c_h-B)^k}\right]}$$

ha valore 1. Ne segue che $l(y)$ e:

$$g(Ay+B)+\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left[\frac{(Ay+B)^k}{c_h^k}-\frac{A^k y^k}{(c_h-B)^k}\right] \quad (3)$$

differiscono soltanto per una costante. Adunque $l(y)$ è di grado non superiore a p, e $\varphi(y)$ è una funzione di rango p.

179. Se in particolare $B=0$, allora:

$$\varphi(y)=e^{l(y)}\, y^m \prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{A\,y}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p}\frac{A^k y^k}{k c_h^k}},$$

sicchè si trova immediatamente, a meno d'una costante additiva:

$$l(y)=g(A\,y).$$

Si vede pertanto che: *La sostituzione:*

$$x=A\,y+B, \qquad (1)$$

dove $B \neq 0$, *non trasforma in generale* (*per* $p>0$) *una funzione semplice di genere* p *in una funzione della stessa natura; invece la sostituzione:*

$$x=A\,y$$

muta una funzione semplice in una funzione semplice.

Per $p=0$ la sostituzione (1) muta una funzione semplice in una funzione semplice, qualunque sia B.

Per $p=1$ esistono infiniti valori di B per cui la (1) ha questa proprietà. Facciamo infatti nell'espressione (3) dell'art. prec. $g(x)=0$ e $p=1$; avremo che $l(y)$ e:

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{A\,y+B}{c_h}-\frac{A\,y}{c_h-B}\right)$$

differiranno tra loro per una costante. Ma quest' ultima espressione può anche scriversi:

$$-B\sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{A\,y}{c_h(c_h-B)}-\frac{1}{c_h}\right];$$

e quindi, perchè $l(y)$ si riduca ad una costante, B, supposta diversa da zero, deve soddisfare all'equazione:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h (c_h - B)} = 0,$$

ossia (v. art. 172, form. (5)) dev'essere radice di $f'(x)$.

180. *Se due funzioni intere sono tali, che i coefficienti corrispondenti dei loro sviluppi sono coniugati, anche le loro radici sono coniugate.*

Sia:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$$

una funzione intera, $x = b + i c$ una sua radice. Sostituendo in luogo di x la sua espressione, e separando le parti reale e imaginaria, si avrà:

$$0 = P(b, c) + i Q(b, c),$$

dove $P(u, v)$, $Q(u, v)$ sono serie di potenze, a coefficienti reali, delle due variabili reali u, v, convergenti per tutti i valori finiti di esse. Ne segue:

$$P(b, c) = 0, \quad Q(b, c) = 0.$$

D'altra parte, se, indicando con a'_h la quantità coniugata di a_h, nell'espressione:

$$\overline{f}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a'_h x^h$$

si fa $x = b - i c$, si otterrà evidentemente:

$$\overline{f}(b - i c) = P(b, c) - i Q(b, c) = 0,$$

ciò che dimostra l'asserto.

181. Segue dal teorema precedente che: *Se una funzione intera ha i coefficienti del suo sviluppo tutti reali, le sue radici sono reali o coniugate due a due.*

Reciprocamente: *Se una funzione* SEMPLICE *di 1.ª classe ha le radici reali o coniugate due a due, i coefficienti del suo sviluppo sono reali.*

Se una funzione di 2.ª classe ha le radici reali o coniugate due a due, i coefficienti del suo sviluppo sono reali quando il fattore esponenziale sia nullo ed i numeri di convergenza corrispondenti a radici coniugate sieno eguali (ciò che può sempre ammettersi, dacchè i numeri di convergenza dipendono solo dai moduli delle radici, e due radici coniugate hanno lo stesso modulo).

182. *Se una funzione intera a coefficienti reali ha più d'una radice reale, tra due sue radici reali consecutive è compreso un numero dispari di radici reali della sua derivata (teorema di Rolle).*

Sieno μ, ν due radici reali consecutive della funzione intera a coefficienti reali $f(x)$; per generalità le supporremo multiple rispettivamente degli ordini ρ, σ. Avremo allora:

$$f(\mu) = f'(\mu) = \ldots = f^{(\rho-1)}(\mu) = 0,$$
$$f(\nu) = f'(\nu) = \ldots = f^{(\sigma-1)}(\nu) = 0,$$

e quindi (art. 116):

$$f(x) = (x-\mu)^\rho \left[\frac{1}{\rho\,!} f^{(\rho)}(\mu) + \frac{x-\mu}{\rho+1\,!} f^{(\rho+1)}(\mu) + \ldots\right],$$

$$f(x) = (x-\nu)^\sigma \left[\frac{1}{\sigma\,!} f^{(\sigma)}(\nu) + \frac{x-\nu}{\sigma+1\,!} f^{(\sigma+1)}(\nu) + \ldots\right],$$

da cui:

$$f'(x) = (x-\mu)^{\varrho-1}\left[\frac{1}{\varrho-1!}f^{(\varrho)}(\mu) + \right.$$
$$\left. + \frac{x-\mu}{\varrho!}f^{(\varrho+1)}(\mu) + \ldots\right],$$

$$f'(x) = (x-\nu)^{\sigma-1}\left[\frac{1}{\sigma-1!}f^{(\sigma)}(\nu) + \right.$$
$$\left. + \frac{x-\nu}{\sigma!}f^{(\sigma+1)}(\nu) + \ldots\right],$$

e:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\mu}\,\frac{\frac{1}{\varrho-1!}f^{(\varrho)}(\mu) + \frac{x-\mu}{\varrho!}f^{(\varrho+1)}(\mu) + \ldots}{\frac{1}{\varrho!}f^{(\varrho)}(\mu) + \frac{x-\mu}{\varrho+1!}f^{(\varrho+1)}(\mu) + \ldots}$$
$$= \frac{1}{x-\nu}\,\frac{\frac{1}{\sigma-1!}f^{(\sigma)}(\nu) + \frac{x-\nu}{\sigma!}f^{(\sigma+1)}(\nu) + \ldots}{\frac{1}{\sigma!}f^{(\sigma)}(\nu) + \frac{x-\nu}{\sigma+1!}f^{(\sigma+1)}(\nu) + \ldots}.$$

Si vede di qui che $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ha un polo semplice tanto in μ che in ν, mentre evidentemente essa è finita in tutto l'intervallo $\mu\,\nu$. Inoltre, avvicinandosi x a μ dalla destra, essa tende a $+\infty$, avvicinandosi x a ν dalla sinistra, essa tende a $-\infty$. Ne segue (art. 84) che essa, e quindi $f'(x)$, si annulla nell'intervallo $\mu\,\nu$ un numero dispari di volte.

È da osservarsi, che la dimostrazione vale per qualunque funzione analitica $f(x)$, la quale sia regolare in un campo contenente nel suo interno l'intervallo $\mu\,\nu$, e sia reale e diversa da zero in tutti i punti dell'intervallo stesso, eccettuati gli estremi, in cui si annulla.

183. *Se una funzione intera $f(x)$ a coefficienti reali ha un numero finito r di variazioni, il numero delle sue radici positive è r o è minore di r d'un numero pari (teorema di Cartesio).*

Il teorema sussiste evidentemente per $r=0$; quindi basterà dimostrarlo per induzione completa.

Poichè il numero delle variazioni è finito, esse saranno tutte comprese fra a_0 ed un certo coefficiente a_l, e da questo innanzi tutti i coefficienti avranno lo stesso segno, che noi supporremo positivo. Ne segue che, se γ è un numero più grande di tutte le radici positive dell'equazione algebrica:

$$\sum_{h=0}^{l} a_h x^h = 0,$$

$f(\gamma)$ sarà positiva; quindi le radici positive della $f(x)$ saranno tutte minori di γ, e però il loro numero sarà finito. Indichiamo tale numero con θ; saranno pure θ le radici positive della funzione:

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{f(x)}{x^\alpha},$$

qualunque sia il numero intero α. Pel teorema dell'articolo precedente (cfr. la fine dell'articolo stesso) dovranno essere almeno $\theta - 1$ le radici positive di $\varphi'_\alpha(x)$. Ora:

$$\varphi'_\alpha(x) = \frac{1}{x^{\alpha+1}}\left(x f'(x) - \alpha f(x)\right),$$

sicchè può dirsi che la funzione intera:

$$\psi_\alpha(x) = x f'(x) - \alpha f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (h - \alpha) a_h x^h$$

ha almeno $\theta - t$ radici positive.

Supponiamo, dopo ciò, che nella $f(x)$ vi sia una variazione fra a_t e a_{t+1}. Fatto $\alpha = t$, confrontiamo la serie dei coefficienti di $f(x)$:

$$a_0, \quad a_1, \ldots, \quad a_{t-1}, \quad a_t, \quad a_{t+1}, \quad a_{t+2}, \ldots \qquad (1)$$

e quella dei coefficienti di $\psi_t(x)$:

$$-t a_0, \; -(t-1) a_1, \ldots, \; -a_{t-1}, \; 0, \; a_{t+1}, \; 2 a_{t+2}, \ldots \qquad (2)$$

Nella parte della serie (1) che va da a_0 a a_{t-1} ed in quella corrispondente della serie (2) vi è un egual numero di variazioni; così nella parte della serie (1) da a_{t+1} in avanti e nella corrispondente della serie (2). Invece la parte a_{t-1}, a_t, a_{t+1} della serie (1) contiene due variazioni od una sola secondochè a_{t-1} ed a_{t+1} hanno o no lo stesso segno; e corrispondentemente la parte $-a_{t-1}$, 0, a_{t+1} della serie (2) ha una o nessuna variazione. Pertanto il numero delle variazioni di $\psi_t(x)$ è $r - 1$; e quindi, siccome si suppone il teorema verificato per $r - 1$, sarà $\theta - 1 \leq r - 1$, donde $\theta \leq r$.

Il numero delle radici positive di $f(x)$ non può dunque superare r.

Osservando poi che per $x = 0$ il valore di $f(x)$ è a_0, e che, al tendere di x a $+\infty$, $f(x)$ tende a $\pm\infty$ secondochè $a_t \gtrless 0$, si conclude facilmente che il numero delle variazioni e quello delle radici positive hanno la stessa parità.

184. Il teorema di Rolle assume, pei polinomi, questa forma più precisa:

Fra due radici consecutive d'un' equazione algebrica avente tutte le radici reali ne esiste una ed una sola della sua derivata.

Ne segue immediatamente l'altro teorema:

Se le radici d'un' equazione algebrica sono tutte reali, la stessa cosa ha luogo per quelle della sua derivata.

Per le funzioni intere trascendenti questa seconda proprietà *non* è una conseguenza necessaria della prima. Ma v'ha di più. Nè l'una nè l'altra proprietà sussiste in generale per queste funzioni.

Quanto alla prima, si osservi che, se $f(x)$ è una funzione semplice di genere $p > 1$ senza radici nulle, $f'(x)$ ha nell'origine una radice multipla d'ordine p; sicchè, supposte reali le radici di $f(x)$, tra la più piccola sua radice negativa e la più piccola sua radice positiva sono certamente comprese p radici (coincidenti) della $f'(x)$.

Quanto alla seconda, basta l'esempio della funzione:

$$f(x) = e^{x^2} \operatorname{sen} x,$$

che ha tutte le radici reali, mentre la sua derivata:

$$f'(x) = e^{x^2} [\cos x + 2x \operatorname{sen} x]$$

ha la radice imaginaria $x = 0{,}771 \ldots i$.

Conviene pertanto studiare in quali casi le proprietà considerate continuino a sussistere anche per le funzioni trascendenti.

È ciò che faremo nei seguenti articoli.

185. *Se $f(x)$ è una funzione semplice avente tutte le radici reali, fra due radici consecutive di essa non aventi segno opposto* * *è compresa una sola radice di $f'(x)$.*

Sia:

$$f(x) = x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

essendo le c_h tutte reali. Segue di qui:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^p}{c_h^{\,p}(x - c_h)}.$$

Se μ, ν sono due radici reali di $f'(x)$, sarà quindi:

$$\frac{m}{\mu^{p+1}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{\,p}(\mu - c_h)} = 0,$$

$$\frac{m}{\nu^{p+1}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{\,p}(\nu - c_h)} = 0,$$

da cui, sommando e sottraendo:

$$\frac{m(\mu^{p+1} + \nu^{p+1})}{\mu^{p+1}\nu^{p+1}} + (\mu + \nu) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{\,p}(\mu - c_h)(\nu - c_h)} -$$

$$- 2 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{\,p-1}(\mu - c_h)(\nu - c_h)} = 0,$$

$$\frac{m(\mu^{p+1} - \nu^{p+1})}{\mu^{p+1}\nu^{p+1}} + (\mu - \nu) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{\,p}(\mu - c_h)(\nu - c_h)} = 0.$$

---

* Con questa frase s'include anche il caso in cui una delle due radici sia nulla.

Dall'ultima equazione si ha:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h{}^p (\mu - c_h)(\nu - c_h)} =$$

$$= -\frac{m}{\mu^{p+1}\nu^{p+1}} (\mu^p + \mu^{p-1}\nu + \ldots + \mu\nu^{p-1} + \nu^p), \quad (1)$$

e sostituendo nella precedente:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h{}^{p-1} (\mu - c_h)(\nu - c_h)} = \frac{m}{2\,\mu^{p+1}\nu^{p+1}}$$

$$[\mu^{p+1} + \nu^{p+1} - (\mu + \nu)(\mu^p + \mu^{p-1}\nu + \ldots + \nu^p)] =$$

$$= -\frac{m}{\mu^p \nu^p} (\mu^{p-1} + \mu^{p-2}\nu + \ldots + \mu\,\nu^{p-2} + \nu^{p-1}). \quad (2)$$

Supponiamo ora μ e ν comprese fra due radici consecutive di $f(x)$. Allora $\mu - c_h$ e $\nu - c_h$ hanno lo stesso segno per tutti i valori di h, e quindi il primo membro della (1) per p pari, o quello della (2) per p dispari, è una quantità essenzialmente positiva. D'altra parte, se $f(x)$ non s'annulla nell'origine, si ha $m = 0$, e quindi i secondi membri delle (1), (2) sono nulli; se s'annulla nell'origine, μ e ν sono necessariamente delle stesso segno, e quindi il secondo membro della (1) o quello della (2), secondochè p è pari o dispari, è essenzialmente negativo. Quindi l'ipotesi fatta è assurda.

La dimostrazione stabilisce anche, pel caso in cui $f(x)$ non si annulla nell'origine ($m = 0$), che tra la più piccola radice negativa e la più piccola radice positiva di essa non possono essere comprese due radici diverse da zero di $f'(x)$. Siccome

in questo caso $f'(x)$ ha una radice p-upla nell'origine, può concludersi che *nell'intervallo considerato esiste o no un'altra radice di* $f'(x)$, *secondochè* p *è pari o dispari.* *

186. *Se una funzione* $f(x)$ *di rango zero o uno ha tutte le radici reali, e se l'esponente esterno è reale o rispettivamente ha i coefficienti reali, le radici della* $f'(x)$ *sono tutte reali.*

Se:

$$f(x) = e^B x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right)$$

è una funzione di rango zero, essa può porsi (articolo 171) sotto forma d'una funzione di rango uno:

$$f(x) = e^{-x \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h} + B} \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\frac{x}{c_h}};$$

* Questo modo particolare di comportarsi della funzione nell'intervallo contenente l'origine non deve far meraviglia, quando si consideri che, mentre l'origine non è caratterizzata da alcuna proprietà speciale per rispetto ad un polinomio, giacchè essa può essere trasportata in un punto qualunque mediante una sostituzione lineare, lo stesso non può dirsi per rispetto ad una funzione intera *semplice*, la quale, in generale, per una sostituzione lineare si muta in una funzione non semplice (art. 179). — L'eccezione deve cessare di esistere per $p = 0$ e per $p = 1$, giacchè allora una funzione semplice può trasformarsi mediante una sostituzione lineare, arbitraria nel primo caso, opportunamente scelta nel secondo, in una funzione semplice. Ed infatti per $p = 0$ e per $p = 1$ anche nell'intervallo tra la più piccola radice negativa e la più piccola radice positiva della $f(x)$ è compresa *una sola* radice della $f'(x)$; questa è diversa da zero per $p = 0$, è nulla per $p = 1$.

sicchè l'espressione:

$$f(x) = e^{Ax+B}\, x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\frac{x}{c_h}} \qquad (1)$$

rappresenta una funzione di rango zero od uno, secondochè $A = -\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h}$ oppure, questa serie non essendo assolutamente convergente, A ha un valore qualunque. In ogni caso, secondo le ipotesi del teorema, A è reale, tali essendo le c_h, ed è pure reale B.

Dalla (1) segue:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = A + \frac{m}{x} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x}{c_h(x - c_h)}.$$

Sia $x = \alpha + i\beta$ una radice complessa della $f'(x)$; dovrà essere:

$$0 = A + \frac{m}{\alpha + i\beta} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha + i\beta}{c_h(\alpha - c_h + i\beta)},$$

ossia:

$$0 = A + \frac{m(\alpha - i\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(\alpha + i\beta)(\alpha - c_h - i\beta)}{c_h((\alpha - c_h)^2 + \beta^2)},$$

ed eguagliando a zero il coefficiente di i:

$$0 = -\frac{m\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{-\alpha\beta + (\alpha - c_h)\beta}{c_h((\alpha - c_h)^2 + \beta^2)} =$$

$$= \beta\left[-\frac{m}{\alpha^2 + \beta^2} - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha - c_h)^2 + \beta^2}\right],$$

equazione che può sussistere solo per $\beta = 0$.

187. *Se una funzione semplice ha tutte le radici reali* E DIVERSE DA ZERO, *anche la sua derivata ha tutte le radici reali.*

Abbiasi la funzione:

$$f(x) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{h=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

donde:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x^p \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{\,p}(x - c_h)}. \tag{1}$$

Se $x = \alpha + i\beta$ è una radice complessa di $f'(x)$, sarà:

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{\,p}(\alpha - c_h + i\beta)} =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha - c_h - i\beta}{c_h^{\,p}((\alpha - c_h)^2 + \beta^2)},$$

ossia, separando le parti reale e imaginaria:

$$\alpha \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{\,p}((\alpha - c_h)^2 + \beta^2)} -$$

$$- \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{\,p-1}((\alpha - c_h)^2 + \beta^2)} = 0, \tag{2}$$

$$\beta \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{\,p}((\alpha - c_h)^2 + \beta^2)} = 0. \tag{3}$$

Supposto $\beta \neq 0$, dev'essere per la (3):

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{\,p}((\alpha - c_h)^2 + \beta^2)} = 0, \tag{4}$$

e quindi la (2) si riduce a:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{\,p-1}\left((\alpha - c_h)^2 + \beta^2\right)} = 0. \qquad (5)$$

Ma le (4), (5) non possono coesistere, perchè il primo membro dell'una o dell'altra, secondochè p è pari o dispari, è composto di sommandi tutti positivi. Dunque dev'essere $\beta = 0$.

188. Può aggiungersi che, *se tutte le radici della funzione sono positive, lo stesso ha luogo per quelle della derivata.* — Infatti, in questa ipotesi, il secondo membro della (1) non può annullarsi per $x \leq 0$.

Per le funzioni semplici di genere zero questo teorema vale anche se esse hanno radici nulle, sicchè può dirsi che, *se nessuna radice d'una funzione semplice di genere zero è complessa nè negativa, la stessa cosa ha luogo per la sua derivata.* — Infatti dalla:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{x - c_h}$$

si vede che, essendo le c_h positive, non può essere $f'(x) = 0$ per x negativa.

Invece, se una funzione semplice di genere p dispari, che si annulla nell'origine, ha le altre radici reali e positive, la derivata ha radici negative.

In questo caso si ha infatti:

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} = m + x^{p+1} \sum \frac{1}{c_h^p (x - c_h)}.$$

Il secondo membro è finito per tutti i valori negativi di x; ha il valore $m\,(>0)$ per $x = 0$, e

tende a $-\infty$ per $\lim x = -\infty$. Ne segue che vi sono valori negativi di x che lo rendono nullo.

189. *Se si ha la funzione:*

$$f(x) = e^{Ax^{r+1}+Bx^r} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{h=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

dove le c_h sono reali, A e B sono reali ed A non è positiva, ed r è quello tra i due numeri p, $p+1$ che è dispari, la $f'(x)$ ha un numero finito di radici complesse, e gli argomenti di queste sono compresi negli intervalli:*

$$\left.\begin{matrix} (2\lambda-1)\frac{\pi}{r}\ldots & 2\lambda\frac{\pi}{r} \\ -(2\lambda-1)\frac{\pi}{r}\ldots & -2\lambda\frac{\pi}{r} \end{matrix}\right\} \left(\lambda = 1, 2, \ldots, \frac{r-1}{2}\right).$$

In altre parole, se si divide il piano in $2r$ spazi angolari eguali mediante raggi uscenti dall'origine, uno dei quali sia l'asse reale positivo, e se, partendo da questo in ambi i sensi, si assegna un numero d'ordine progressivo a ciascuno degli spazi accennati, le radici complesse potranno trovarsi soltanto negli spazi portanti numero pari.

Inoltre fra due radici consecutive di $f(x)$ non aventi segno opposto è compresa una sola radice (reale) di $f'(x)$.

---

* Desaint (43), che dà un teorema di cui il presente è una generalizzazione, dice erroneamente che A deve essere positiva.

Poniamo:

$$r = p + 1 - \varepsilon,$$

dove ε vale 0 od 1 secondochè p è pari o dispari. Avremo:

$$\frac{f'(x)}{x^{r-1} f(x)} = (r+1) A x + r B + \\ + \frac{m}{x^r} + x^\varepsilon \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h{}^p (x - c_h)}.$$

Ora:

$$\frac{x^\varepsilon}{c_h{}^p (x - c_h)} = \left(\frac{x}{c_h}\right)^\varepsilon \frac{1}{c_h{}^{r-1} (x - c_h)},$$

inoltre, per ambi i valori che può prendere ε:

$$\left(\frac{x}{c_h}\right)^\varepsilon = 1 + \varepsilon \frac{x - c_h}{c_h},$$

quindi:

$$\left(\frac{x}{c_h}\right)^\varepsilon \frac{1}{c_h{}^{r-1} (x - c_h)} = \frac{1}{c_h{}^{r-1} (x - c_h)} + \varepsilon \frac{1}{c_h{}^r},$$

e:

$$\frac{f'(x)}{x^{r-1} f(x)} = (r+1) A x + r B + \frac{m}{x^r} + \\ + \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{c_h{}^{r-1} (x - c_h)} + \varepsilon \frac{1}{c_h{}^r}\right]. \qquad (1)$$

Sia $x = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ una radice complessa

di $f'(x)$; sarà:

$$0 = (r+1) A \rho (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) +$$

$$+ r B + \frac{m}{\rho^r} (\cos r\theta - i \operatorname{sen} r\theta) +$$

$$+ \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{\rho\cos\theta - c_h - i\rho \operatorname{sen}\theta}{c_h{}^{r-1}((\rho\cos\theta - c_h)^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta)} + \varepsilon \frac{1}{c_h{}^r} \right] = 0,$$

ed eguagliando a zero il coefficiente di i:

$$(r+1) A \rho \operatorname{sen}\theta - \frac{m}{\rho^r} \operatorname{sen} r\theta -$$

$$- \rho \operatorname{sen}\theta \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h{}^{r-1}(\rho^2 + c^2{}_h - 2\rho c_h \cos\theta)} = 0, \quad (2)$$

da cui:

$$\frac{\operatorname{sen} r\theta}{\operatorname{sen}\theta} =$$

$$= \left[(r+1)A - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h{}^{r-1}(\rho^2 + c^2{}_h - 2\rho c_h \cos\theta)} \right] \frac{\rho^{r+1}}{m}, \quad (3)$$

quindi, tenuto conto che A è negativa e che $r-1$ è pari:

$$\frac{\operatorname{sen} r\theta}{\operatorname{sen}\theta} < 0.$$

Cioè:

Se $\quad 0 < \theta < \pi, \quad (2\lambda - 1)\frac{\pi}{r} < \theta < 2\lambda \frac{\pi}{r},$

se $\quad 0 > \theta > -\pi, \quad -(2\lambda - 1)\frac{\pi}{r} > \theta > -2\lambda \frac{\pi}{r},$

dove λ denota un numero intero qualunque.

Scriviamo la (3) così:

$$\frac{\operatorname{sen} r\theta}{\operatorname{sen}\theta} = -L\frac{\rho^{r+1}}{m},$$

dove L è una quantità positiva; ossia:

$$\rho^{r+1} = -\frac{m}{L}\frac{\operatorname{sen} r\theta}{\operatorname{sen}\theta}. \tag{4}$$

Per $\rho > 2$, $|c_h| > 2$, si ha:

$$\rho + |c_h| < \rho\,|c_h|,$$

quindi:

$$\rho^2 + c^2_h + 2\rho\,|c_h| < \rho^2 c^2_h,$$

donde, a maggior ragione:

$$\rho^2 + c^2_h - 2\rho\, c_h \cos\theta < \rho^2 c^2_h,$$

e:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h{}^{r-1}(\rho^2 + c^2_h - 2\rho\, c_h \cos\theta)} > \frac{1}{\rho^2}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h{}^{r+1}},$$

da cui:

$$L > \frac{1}{\rho^2}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h{}^{r+1}},$$

dove la serie che figura nel secondo membro è assolutamente convergente.

Inoltre:

$$|\operatorname{sen} r\theta| \leqq 1, \quad |\operatorname{sen}\theta| \geqq \operatorname{sen}\frac{\pi}{r},$$

quindi dalla (4):

$$\rho^{r+1} < \frac{m\,\rho^2}{\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h{}^{r+1}}} \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{r}},$$

ossia:

$$\rho^{r-1} < \frac{m}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{r} \sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h{}^{r+1}}}.$$

Di qui segue, per $r > 1$, che i moduli delle radici complesse di $f'(x)$ sono tutti inferiori ad una quantità finita e determinata, e quindi che il numero di tali radici è finito.

Infine è facile vedere che, quando x varia in senso crescente tra due radici consecutive di $f(x)$ non aventi segno opposto, il secondo membro della (1) passa, sempre decrescendo, da $+\infty$ a $-\infty$. Ne segue che nell'intervallo considerato è compresa una sola radice della derivata.

Per $r = 1$ la (2) si riduce a:

$$\operatorname{sen}\theta \left[2\,A\,\rho - \frac{m}{\rho} - \rho \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^2 + c^2{}_h - 2\,\rho\,c_h \cos\theta} \right] = 0,$$

equazione che, per essere $A < 0$, non può essere soddisfatta se non per $\operatorname{sen}\theta = 0$. Dunque, *se* $p = 0$ *o se* $p = 1$, *la derivata non ha radici complesse.*

Un altro caso, in cui le radici della derivata sono tutte reali, è quello di $m = 0$. Infatti allora il primo membro della (2) si riduce a:

$$\rho \operatorname{sen}\theta \left[(r+1)\,A - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h{}^{r-1}\,(\rho^2 + c^2{}_h - 2\,\rho\,c_h \cos\theta)} \right],$$

che, per $\rho > 0$, non può essere nullo se non quando $\operatorname{sen} \theta = 0$.

190. Il teorema poc'anzi dimostrato stabilisce soltanto una restrizione riguardo al numero ed agli argomenti delle radici complesse della derivata; esso però non ci assicura dell'esistenza di funzioni della natura considerata, la cui derivata abbia effettivamente radici complesse. A togliere ogni dubbio su questo punto valga il seguente esempio.

Sia $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ una successione indefinitamente crescente di numeri positivi tali che $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h{}^s}$ sia convergente soltanto per $s \geqq 3$. Costruiamo la funzione semplice di genere 2 avente la radice doppia 0 e le radici semplici $\pm \gamma_1, \pm \gamma_2, \ldots$:

$$f(x) =$$

$$= x^2 \prod_{h=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{x}{\gamma_h}\right) e^{\frac{x}{\gamma_h} + \frac{x^2}{2\gamma^2_h}} \left(1 + \frac{x}{\gamma_h}\right) e^{-\frac{x}{\gamma_h} + \frac{x^2}{2\gamma^2_h}} \right] =$$

$$= x^2 \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\gamma^2_h}\right) e^{\frac{x^2}{\gamma^2_h}}.$$

Poniamo $x^2 = y$, $\gamma^2_h = \delta_h$; sarà:

$$f(x) = \varphi(y) = y \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y}{\delta_h}\right) e^{\frac{y}{\delta_h}},$$

da cui:

$$f'(x) = 2\, x\, \varphi'(y).$$

Poichè $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_h{}^t}$ è convergente pei soli valori interi di t non minori di 2, $\varphi(y)$ è una funzione semplice di genere uno avente, oltre la radice 0, tutte le altre radici reali e positive. Ne segue (articolo 188) che $\varphi'(y)$ ha radici negative, e quindi che $f'(x)$ ha radici puramente imaginarie.

191. I teoremi degli articoli precedenti sono suscettibili di varie generalizzazioni. Alcune si ottengono immediatamente ricordando (art. 178, 179):

Che una sostituzione della forma $x = Ay + B$ (trasformazione dell'asse reale in una retta qualunque del piano) muta una funzione semplice di genere zero in una della stessa natura;

Che lo stesso ha luogo per una funzione di genere 1 purchè B (la nuova origine) sia radice della sua derivata;

Che una sostituzione della forma $x = Ay$ (rotazione intorno all'origine) muta una funzione semplice di genere p in una della stessa natura.

Dopo ciò si hanno i teoremi seguenti:

Se le radici d'una funzione semplice di genere zero stanno sopra una retta qualunque, sulla stessa retta stanno le radici della sua derivata.

Se le radici d'una funzione semplice di genere uno stanno sopra una retta contenente una radice della derivata, sulla stessa retta stanno tutte le altre radici di questa.

Se le radici d'una funzione semplice di genere >1 *sono diverse da zero e stanno sopra una retta passante per l'origine, sulla stessa retta stanno le radici della sua derivata.*

192. *Se le radici d'una funzione semplice di genere uno stanno tutte sopra una retta, le radici della sua derivata stanno tutte dalla stessa parte di questa retta da cui sta l'origine.*

Possiamo supporre la retta parallela all'asse delle quantità imaginarie, giacchè, se non lo fosse, potremmo ridurci a questo caso mediante un'opportuna sostituzione della forma $x = A\,y$.

Sia dunque $c_h = \mu + i\,\nu_h$, e $x = \alpha + i\,\beta$ sia una radice della derivata.

Dovrà essere:

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h\,(x - c_h)} =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{[\mu + i\,\nu_h]\,[(\alpha - \mu) + i\,(\beta - \nu_h)]},$$

donde, ponendo:

$$(\mu^2 + \nu^2{}_h)\,[(\alpha - \mu)^2 + (\beta - \nu_h)^2] = \delta^2{}_h,$$

segue:

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(\mu - i\,\nu_h)\,[(\alpha - \mu) - i\,(\beta - \nu_h)]}{\delta^2{}_h},$$

e, separando le parti reale e imaginaria:

$$\begin{aligned} \mu\,(\alpha - \mu)\,S_0 - \beta\,S_1 + S_2 &= 0, \\ -\beta\,\mu\,S_0 + (2\,\mu - \alpha)\,S_1 &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

dove:

$$S_0 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^2{}_h}, \quad S_1 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\nu_h}{\delta^2{}_h}, \quad S_2 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\nu^2{}_h}{\delta^2{}_h}.$$

Moltiplichiamo la prima delle (1) per α^2, la seconda per $-\alpha\beta$, e sommiamo; avremo:

$$[\mu(\alpha-\mu)\alpha^2+\mu\alpha\beta^2]\,S_0+$$
$$+[-\alpha^2\beta-\alpha\beta(2\mu-\alpha)]\,S_1+\alpha^2 S_2=0,$$

ossia:

$$\mu(\alpha-\mu)(\alpha^2+\beta^2)\,S_0+\mu^2\beta^2 S_0-2\mu\alpha\beta\,S_1+\alpha^2 S_2=0,$$

o ancora:

$$\mu(\alpha-\mu)(\alpha^2+\beta^2)\,S_0+\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(\mu\beta-\nu_h\alpha)^2}{\delta^2_h}=0,$$

donde:

$$\mu(\alpha-\mu)<0,$$

relazione che dimostra l'asserto.

193. *Se le radici d'una funzione semplice di genere zero stanno su due rette parallele, quelle della derivata sono tutte comprese fra le due rette.*

Con una sostituzione lineare possiamo ridurre le rette ad essere parallele all'asse y ed equidistanti da esso; si avrà allora $c_h=\varepsilon_h\mu+i\nu_h$, dove:

$$\varepsilon_h=\pm 1.$$

Se $x=\alpha+i\beta$ è una radice della derivata, dovrà essere:

$$0=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{x-c_h}=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha-\varepsilon_h\mu)+i(\beta-\nu_h)}=$$
$$=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(\alpha-\varepsilon_h\mu)-i(\beta-\nu_h)}{(\alpha-\varepsilon_h\mu)^2+(\beta-\nu_h)^2},$$

da cui, posto $(\alpha - \varepsilon_h \mu)^2 + (\beta - \nu_h)^2 = \delta^2_h$:

$$\alpha \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^2_h} - \mu \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_h}{\delta^2_h} = 0, \quad \beta \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^2_h} - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\nu_h}{\delta^2_h} = 0.$$

Dalla prima di queste equazioni, tenuto conto che:

$$\left| \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_h}{\delta^2_h} \right| < \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^2_h},$$

segue $\left| \frac{\alpha}{\mu} \right| < 1$, relazione che dimostra l'asserto.

194. *Se le radici d'una funzione semplice di genere zero si trovano tutte dalla stessa parte di una certa retta, lo stesso ha luogo per le radici della sua derivata.*

Preso come retta l'asse reale, il che è sempre possibile, e posto $c_h = \mu_h + i\,\nu_h$, tutte le ν_h saranno dello stesso segno, p. es. positive. Allora, indicando con $x = \alpha + i\,\beta$ una radice della derivata, sarà:

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{x - c_h} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha - \mu_h + i(\beta - \nu_h)} =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha - \mu_h - i(\beta - \nu_h)}{(\alpha - \mu_h)^2 + (\beta - \nu_h)^2},$$

donde, posto $(\alpha - \mu_h)^2 + (\beta - \nu_h)^2 = \delta^2_h$:

$$\alpha \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^2_h} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mu_h}{\delta^2_h}, \quad \beta \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^2_h} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\nu_h}{\delta^2_h}. \qquad (1)$$

Si vede di qui che anche β dev'essere positiva.

195. *Se le radici d'una funzione semplice di genere zero si trovano tutte entro un angolo acuto, lo stesso ha luogo per le radici della sua derivata.*

Possiamo supporre che il vertice dell'angolo sia l'origine, che un lato di esso sia l'asse reale, e che l'altro stia nel primo quadrante; sarà allora, colle notazioni dell'art. prec., $\mu_h > 0$, $\nu_h > 0$, e inoltre il rapporto $\frac{\nu_h}{\mu_h}$ sarà compreso fra 0 ed una certa quantità positiva finita l (coefficiente angolare del secondo lato dell'angolo). Si avrà quindi:

$$0 < \frac{\frac{\nu_h}{\delta^2_h}}{\frac{\mu_h}{\delta^2_h}} < l,$$

e per conseguenza:

$$0 < \frac{\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\nu_h}{\delta^2_h}}{\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mu_h}{\delta^2_h}} < l,$$

ossia (v. eq. (1) dell'art. prec.):

$$0 < \frac{\beta}{\alpha} < l.$$

196. Prima di esporre i pochi teoremi noti che si riferiscono alla determinazione del genere d'una funzione intera, dimostreremo il lemma seguente:

Se $c_1, c_2, \ldots$ sono le radici d'una funzione intera, $r_1, r_2, \ldots$ i corrispondenti numeri di convergenza, la serie:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{r_h}}{c_h^{\,r_h}(x - c_h)} \tag{1}$$

è equiconvergente in ogni campo finito non contenente alcuno dei punti c_h.

Sia C il campo considerato; potremo descrivere, col centro nell'origine, un cerchio contenente nel suo interno il campo C e non passante per alcun punto c_h. Inoltre, se ρ è il raggio del cerchio, e se:

$$|c_q| < \rho < |c_{q+1}|,$$

potremo trovare una quantità σ tale, che i cerchi di raggio σ col centro nei punti $c_1, c_2, \ldots, c_q$ sieno tutti esterni a C ed interni al cerchio ρ. Allora il campo C sarà contenuto nel campo D racchiuso fra il cerchio ρ e i cerchi σ, e basterà dimostrare che la serie (1) è equiconvergente in D perchè resti provato che lo è in C.

Indichiamo ora con m un numero qualunque maggiore di q; avremo, per $|x| < \rho$:

$$\left| \sum_{h=m}^{\infty} \frac{x^{r_h}}{c_h^{\,r_h}(x - c_h)} \right| \leq \sum_{h=m}^{\infty} \frac{\rho^{r_h}}{|c_h|^{r_h+1} \left| 1 - \dfrac{x}{c_h} \right|},$$

ma:

$$\left| 1 - \frac{x}{c_h} \right| \geq 1 - \left| \frac{x}{c_h} \right| \geq 1 - \frac{\rho}{|c_{q+1}|},$$

quindi:

$$\left| \sum_{h=m}^{\infty} \frac{x^{r_h}}{c_h^{\,r_h}(x-c_h)} \right| \leq \frac{1}{1-\dfrac{\rho}{|c_{q+1}|}} \sum_{h=m}^{\infty} \frac{\rho^{r_h}}{|c_h^{\,r_h+1}|}.$$

Ora la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{r_h}}{c_h^{\,r_h+1}}$ è assolutamente convergente per tutti i valori finiti di x, quindi in particolare per $x=\rho$; presa dunque ad arbitrio la quantità τ, si può determinare un numero n tale che per ogni $m>n$ sia:

$$\sum_{h=m}^{\infty} \frac{\rho^{r_h}}{c_h^{\,r_h+1}} < \tau\left(1-\frac{\rho}{|c_{q+1}|}\right).$$

Ne segue che, presa τ comunque, si può trovare un numero n tale, che per ogni m maggiore di n e di q e per $|x|<\rho$ sia:

$$\left| \sum_{h=m}^{\infty} \frac{\rho^{r_h}}{c_h^{\,r_h}(x-c_h)} \right| < \tau.$$

I termini $\sum_{h=1}^{q} \frac{x^{r_h}}{c_h^{\,r_h}(x-c_h)}$ sono in numero finito e costituiscono una funzione (razionale) finita in tutto il campo D; quindi essi non influiscono sulla convergenza.

197. *Se $c_1, c_2, \ldots$ sono le radici d' una funzione intera, e se, posto $|c_h| = \gamma_h$, si ha:*

$$\lim_{h=\infty} \gamma_h^{p-1}(\gamma_{h+1}-\gamma_h) = \lambda,$$

essendo p un numero intero non negativo e λ una quantità finita positiva, il genere della funzione è p (teorema di De Sparre).

Presa una quantità positiva $\theta < \lambda$, può trovarsi un numero m tale, che per ogni $h \geqq m$ sia:

$$\gamma_h^{p-1}(\gamma_{h+1} - \gamma_h) > \theta.$$

Si avrà dunque:

$$\gamma_m^{p-1}(\gamma_{m+1} - \gamma_m) > \theta,$$
$$\gamma_{m+1}^{p-1}(\gamma_{m+2} - \gamma_{m+1}) > \theta,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ossia:

$$\gamma_{m+1} > \gamma_m + \frac{\theta}{\gamma_m^{p-1}}, \quad \gamma_{m+2} > \gamma_{m+1} + \frac{\theta}{\gamma_{m+1}^{p-1}}, \ldots,$$

ed elevando alla potenza p:

$$\gamma_{m+1}^p > \gamma_m^p + p\,\theta + \ldots, \quad \gamma_{m+2}^p > \gamma_{m+1}^p + p\,\theta + \ldots,$$

donde:

$$\gamma_{m+1}^p > \gamma_m^p + p\,\theta, \quad \gamma_{m+2}^p > \gamma_m^p + 2\,p\,\theta, \ldots,$$

ed a maggior ragione:

$$\gamma_{m+1}^p > p\,\theta, \quad \gamma_{m+2}^p > 2\,p\,\theta, \ldots,$$

Ne segue:

$$\frac{1}{\gamma_{m+1}^p} < \frac{1}{p\,\theta}, \quad \frac{1}{\gamma_{m+2}^p} < \frac{1}{2\,p\,\theta}, \ldots,$$

ed elevando alla potenza $\frac{p+1}{p}$ e sommando:

$$\frac{1}{\gamma_{m+1}^{p+1}} + \frac{1}{\gamma_{m+2}^{p+1}} + \ldots <$$

$$< \frac{1}{(p\,\theta)^{\frac{p+1}{p}}} \left[\frac{1}{1^{\frac{p+1}{p}}} + \frac{1}{2^{\frac{p+1}{p}}} + \ldots \right];$$

ma la serie del 2° membro è convergente,* quindi lo è anche quella del 1° membro, e la funzione è *al più* di genere p.

D'altra parte, presa una quantità $\varkappa > \lambda$, può trovarsi un numero n tale, che per ogni $h \geqq n$ sia:

$$\gamma_h^{p-1} (\gamma_{h+1} - \gamma_h) < \varkappa.$$

Sarà dunque:

$$\gamma_n^{p-1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) < \varkappa,$$

ossia:

$$\gamma_{n+1} < \gamma_n + \frac{\varkappa}{\gamma_n^{p-1}},$$

ed innalzando alla potenza p:

$$\gamma_{n+1}^p < \gamma_n^p + \varkappa \left[p + \binom{p}{2} \frac{\varkappa}{\gamma_n^p} + \binom{p}{3} \frac{\varkappa^2}{\gamma_n^{2p}} + \ldots \right].$$

---

* V. Cesàro, *Corso di analisi algebrica*, pag. 142.

Ora, poichè $\lim_{h=\infty} \gamma_h = \infty$, si può supporre n abbastanza grande perchè per ogni $h \geqq n$ sia:

$$\gamma_h^p > \varkappa;$$

si ha allora dalla relazione precedente:

$$\gamma_{n+1}^p < \gamma_n^p + \varkappa \left[p + \binom{p}{2} + \binom{p}{3} + \ldots \right] =$$
$$= \gamma_n^p + \varkappa (2^p - 1),$$

ossia, ponendo per semplicità $\varkappa (2^p - 1) = \mu$:

$$\gamma_{n+1}^p < \gamma_n^p + \mu.$$

Allo stesso modo si avrà:

$$\gamma_{n+2}^p < \gamma_{n+1}^p + \mu, \ldots,$$

e quindi:

$$\gamma_{n+2}^p < \gamma_n^p + 2\mu, \ldots$$

Ne segue:

$$\frac{1}{\gamma_{n+1}^p} + \frac{1}{\gamma_{n+2}^p} + \ldots > \frac{1}{\gamma_n^p + \mu} + \frac{1}{\gamma_n^p + 2\mu} + \ldots >$$
$$> \frac{1}{\gamma_n^p + \mu} + \frac{1}{2\left(\gamma_n^p + \mu\right)} + \ldots$$
$$= \frac{1}{\gamma_n^p + \mu} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots \right];$$

ma quest'ultima serie è divergente,* quindi lo è anche quella del 1° membro, e la funzione considerata è *precisamente* di genere p.

198. *Se $f(x)$ è una funzione di rango p, si ha:*

$$\lim_{\rho=\infty} \mathbf{M} \frac{f'(\rho)}{\rho^p f(\rho)} = 0, \tag{1}$$

mentre l'espressione:

$$\mathbf{M} \frac{f'(\rho)}{\rho^{p-1} f(\rho)} \tag{2}$$

non tende ad alcun limite finito al crescere indefinitamente di ρ.

Prima di dimostrare il teorema, conviene fare un'osservazione.

La funzione $\dfrac{f'(x)}{x^p f(x)}$ è finita e continua su ogni circonferenza, col centro nell'origine, non passante per alcun posto-zero di $f(x)$; quindi per tutte e sole queste circonferenze ha un significato determinato il simbolo:

$$\mathbf{M} \frac{f'(\rho)}{\rho^p f(\rho)}.$$

I valori di ρ che sono moduli di radici di $f(x)$ formano un insieme A isolato ed avente il solo punto limite ∞; detto quindi B l'insieme dei valori reali e positivi non appartenenti ad A, esi-

* V. Cesàro, op. cit., pag. 118.

stono sempre infiniti elementi di B maggiori di un numero positivo λ, qualunque sia questo numero. Ora il significato della relazione (1) è, che, presa una quantità positiva σ qualunque, può sempre trovarsi una quantità positiva λ tale, che per tutti gli elementi ρ di B maggiori di λ sia:

$$\left| \mathbf{M} \frac{f'(\rho)}{x^p f(\rho)} \right| < \sigma.$$

È ovvio che analoghe considerazioni valgono per l'espressione (2).

Sia la funzione data:

$$f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

dove $g(x)$ è un polinomio di grado non maggiore di p, $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|c_h|^{p+1}}$ è convergente e $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|c_h|^p}$ è divergente. Si avrà:

$$\frac{f'(x)}{x^p f(x)} = \frac{g'(x)}{x^p} + \frac{m}{x^{p+1}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p (x - c_h)} =$$

$$= \frac{g'(x)}{x^p} + \frac{m}{x^{p+1}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x}{c_h^{p+1} (x - c_h)} - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p+1}},$$

ossia, ponendo $g(x) = \sum_{i=0}^{p} b_i x^i$:

$$\frac{f'(x)}{x^p f(x)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{i\, b_i}{x^{p+1-i}} + \frac{m}{x^{p+1}} +$$

$$+ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x}{c_h^{p+1} (x - c_h)} - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p+1}}.$$

Prendiamo un valore ρ dell'insieme B, e supponiamo:

$$|c_q| < \rho < |c_{q+1}|;$$

avremo (art. 99, 101, 104):

$$\mathbf{M}\frac{i\,b_i}{\rho^{p+1-i}} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\mathbf{M}\frac{m}{\rho^{p+1}} = 0,$$

$$\mathbf{M}\frac{\rho}{c_h^{p+1}(\rho - c_h)} = \begin{cases} \dfrac{1}{c_h^{p+1}} & \text{per } h \leq q, \\ 0 & \text{per } h > q, \end{cases}$$

$$\mathbf{M}\frac{1}{c_h^{p+1}} = \frac{1}{c_h^{p+1}},$$

quindi (art. 100), tenuto conto che la serie:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p(x - c_h)},$$

e perciò anche la serie $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \dfrac{x}{c_h^{p+1}(x - c_h)}$, è equiconvergente sulla circonferenza ρ (art. 196):

$$\mathbf{M}\frac{f'(\rho)}{\rho^p f(\rho)} = \sum_{h=1}^{q} \frac{1}{c_h^{p+1}} - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p+1}} = -\sum_{h=q+1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p+1}},$$

e infine, essendo $\lim q = \infty$ per $\lim \rho = \infty$:

$$\lim_{\rho=\infty} \mathbf{M}\frac{f'(\rho)}{\rho^p f(\rho)} = 0.$$

Si ha poi:

$$\frac{f'(x)}{x^{p-1}f(x)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{i\,b_i}{x^{p-i}} + \frac{m}{x^p} + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x}{c_h^p(x-c_h)}.$$

Ora:

$$\mathbf{M}\frac{i\,b_i}{\rho^{p-i}} = \begin{cases} 0 \text{ per } i=1,\,2,\ldots,p-1, \\ p\,b_p \text{ per } i=p, \end{cases}$$

$$\mathbf{M}\frac{m}{\rho^p} = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad p>0, \\ m & \text{per} \quad p=0, \end{cases}$$

$$\mathbf{M}\frac{\rho}{c_h^p(\rho-c_h)} = \begin{cases} \dfrac{1}{c_h^p} & \text{per} \quad h \leq q, \\ 0 & \text{per} \quad h>q, \end{cases}$$

quindi, designando con ε un coefficiente nullo per $p>0$ ed $=1$ per $p=0$:

$$\mathbf{M}\frac{f'(\rho)}{\rho^{p-1}f(\rho)} = p\,b_p + \varepsilon\,m + \sum_{h=1}^{q} \frac{1}{c_h^p}.$$

Ma la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p}$ non è convergente, quindi $\lim_{\rho=\infty} \mathbf{M}\frac{f'(\rho)}{\rho^{p-1}f(\rho)}$ o non esiste, od è infinito, secondochè quella serie è indeterminata o divergente.

È da osservarsi, che la relazione (1) vale anche quando in luogo di p si ponga un numero intero qualunque maggiore di p. Infatti una funzione di rango p può sempre mettersi (art. 171) sotto forma di funzione di rango maggiore di p.

199. *Se $f(x)$ è una funzione intera, ed ha luogo la relazione:*

$$\lim_{\rho=\infty} \mathbf{M} \frac{f'(\rho)}{\rho^t f(\rho)} = 0 \tag{1}$$

per ogni numero intero t non inferiore ad un numero non negativo p, $f(x)$ è una funzione di rango p.

Sia:

$$f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}}, \tag{2}$$

dove:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i .$$

Sarà:

$$\frac{f'(x)}{x^t f(x)} = \sum_{i=1}^{\infty} i b_i x^{i-t-1} + \frac{m}{x^{t+1}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{r_h - t}}{c_h^{r_h}(x - c_h)}.$$

Per:

$$|c_q| < \rho < |c_{q+1}|, \quad |x| = \rho, \; h \leq q$$

si ha:

$$\frac{1}{x - c_h} = \sum_{i=0}^{\infty} c_h^i x^{-i-1},$$

quindi:

$$\frac{x^{r_h - t}}{c_h^{r_h}(x - c_h)} = \sum_{i=0}^{\infty} c_h^{i - r_h} x^{r_h - t - i - 1};$$

il valor medio di questa espressione è il termine dello sviluppo indipendente da x, cioè:

$$\mathbf{M}\,\frac{\rho^{r_h-t}}{c_h^{r_h}(\rho-c_h)}=\begin{cases}0 & \text{per } r_h\leqq t,\\ \dfrac{1}{c_h^{t+1}} & \text{per } r_h>t.\end{cases}$$

Per $h>q$ si ha:

$$\frac{1}{x-c_h}=-\sum_{i=0}^{\infty}c_h^{-i-1}x^i\,,$$

quindi:

$$\frac{x^{r_h-t}}{c_h^{r_h}(x-c_h)}=-\sum_{i=0}^{\infty}c_h^{-r_h-i-1}x^{r_h+i-t},$$

e:

$$\mathbf{M}\,\frac{\rho^{r_h-t}}{c_h^{r_h}(\rho-c_h)}=\begin{cases}\dfrac{1}{c_h^{t+1}} & \text{per } r_h\leqq t,\\ 0 & \text{per } r_h>t.\end{cases}$$

Inoltre:

$$\mathbf{M}\sum_{i=1}^{\infty}i\,b_i\,\rho^{i-t-1}=(t+1)\,b_{t+1},$$

$$\mathbf{M}\,\frac{m}{\rho^{t+1}}=0.$$

Quindi:

$$\mathbf{M}\,\frac{f'(\rho)}{\rho^t\,f(\rho)}=(t+1)\,b_{t+1}+\sum_{h=m_t+1}^{q}\frac{1}{c_h^{t+1}},$$

se, come si può sempre supporre per l'arbitrarietà di q, vi sono sempre numeri r_h d'indice non superiore a q e di valore maggiore di t (il più piccolo indice di tali numeri è quello designato con $m_t + 1$). In virtù della (1) si ha quindi, per $t \geqq p$:

$$b_{t+1} = -\frac{1}{t+1} \sum_{h=m_t+1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{t+1}}.$$

Moltiplichiamo per x^{t+1} e sommiamo da $t = p$ a $t = \infty$, avvertendo che la somma dei primi membri, essendo una parte dello sviluppo di $g(x)$, è una serie convergente per tutti i valori finiti di x. Avremo:

$$\sum_{t=p}^{\infty} b_{t+1} x^{t+1} = -\sum_{t=p}^{\infty} \left[\frac{x^{t+1}}{t+1} \sum_{h=m_t+1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{t+1}} \right],$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\sum_{t=p}^{\infty} b_{t+1} x^{t+1} = -\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{t=p}^{r_h-1} \frac{x^{t+1}}{(t+1)\, c_h^{t+1}} =$$

$$= -\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{t=p+1}^{r_h} \frac{x^t}{t\, c_h^t},$$

dove s'intende, naturalmente, che manchino i sommandi relativi a quei numeri h per cui $r_h \leqq p$. La (2) può scriversi allora:

$$f(x) =$$

$$= e^{\sum_{i=0}^{p} b_i x^i - \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{t=p+1}^{r_h} \frac{x^t}{t c_h^t}} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

ossia riducendo:

$$f(x) = e^{\sum_{i=0}^{p} b_i x^i} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

sicchè $f(x)$ è una funzione di prima classe e di rango non maggiore di p.

D'altra parte, se essa fosse di rango minore di p, la (1) sussisterebbe (art. 198) anche per $t < p$, ciò che è contro le ipotesi del teorema, quindi $f(x)$ è precisamente di rango p.

200. Un caso particolare di questo teorema è il seguente:

Se, comunque x tenda ad infinito (senza però passare per alcun posto-zero di $f(x)$), $\frac{f'(x)}{x^p f(x)}$ *tende a zero, $f(x)$ è tutt'al più di rango p.*

201. *Se $f(x)$ è una funzione semplice avente tutte le radici reali,* $f'(x)$ è una funzione dello stesso genere di $f(x)$.***

Sieno $d_1, d_2, \ldots$ le radici positive di $f(x)$ disposte in ordine crescente; $-e_1, -e_2, \ldots$ le ra-

* Od anche il prodotto di una tal funzione per un esponenziale come quello dell'art. 189.

** Il teorema della conservazione del genere probabilmente sussiste, non solo per tutte le funzioni semplici, qualunque sia la natura delle loro radici, ma anche per tutte le funzioni di rango determinato. Però esso non fu ancora dimostrato in generale; come vedremo più innanzi, il risultato più generale a cui si è giunti sinora è questo: che, se $f(x)$ è di rango p, $f'(x)$ è di rango p o $p+1$. La conservazione del rango fu dimostrata da Laguerre (92) pel caso in cui la funzione considerata ha un numero finito di radici complesse.

dici negative disposte in ordine di valore assoluto crescente. In ogni intervallo $d_h\, d_{h+1}$ è compresa (art. 189) una ed una sola radice s_h di $f'(x)$, in ogni intervallo $(-e_h)\ (-e_{h+1})$ una ed una sola radice $-t_h$. Oltre le radici s_h, t_h la $f'(x)$ potrà avere un numero finito di radici comprese nell'intervallo $-e_1\, d_1$, ed un numero pure finito di radici complesse; tutte queste non influiscono sulla determinazione del genere. Dalle relazioni:

$$d_h < s_h < d_{h+1}, \qquad e_h < t_h < e_{h+1}$$

segue:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{d_h^{p+1}} > \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{s_h^{p+1}}, \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{e_h^{p+1}} > \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{t_h^{p+1}},$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{s_h^p} > \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{d_{h+1}^p} = \sum_{h=2}^{\infty} \frac{1}{d_h^p},$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{t_h^p} > \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{e_{h+1}^p} = \sum_{h=2}^{\infty} \frac{1}{e_h^p}.$$

Ma, se p è il genere di $f(x)$, le serie:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{d_h^{p+1}}, \qquad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{e_h^{p+1}}$$

sono convergenti, ed una almeno delle $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{d_h^p}$, $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{e_h^p}$ è divergente. Ne segue che $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{s_h^{p+1}}$ e

$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{t_h^{p+1}}$ sono convergenti, e che una almeno delle $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{s_h^p}$, $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{t_h^p}$ è divergente; il che dimostra l'asserto.

Funzioni aventi un solo punto singolare posto a distanza finita ($C\,1\,b$).

202. Se $f(x)$ è una funzione analitica uniforme avente un solo punto singolare c, posto:

$$y = \frac{1}{x - c},$$

$f(x)$ si trasformerà in una funzione di y avente una sola singolarità all'infinito, cioè in una funzione intera di y. Quindi la forma più generale delle funzioni aventi un solo punto singolare c è $g\left(\frac{1}{x-c}\right)$, dove g denota una funzione intera; questa è razionale o trascendente secondochè la singolarità è polare od essenziale.

Un esempio di tali funzioni è la *caratteristica* (art. 145) d'un punto singolare isolato.

Funzioni aventi un numero finito di punti singolari ($C2$).

203. Sieno $c_1, c_2, \ldots, c_n$ i punti singolari, $g_1\left(\frac{1}{x-c_1}\right), g_2\left(\frac{1}{x-c_2}\right), \ldots, g_n\left(\frac{1}{x-c_n}\right)$ le loro caratteristiche; le g denotano funzioni intere dei loro argomenti. Se $f(x)$ è la funzione cercata, la differenza:

$$f(x) - g_1\left(\frac{1}{x-c_1}\right) - g_2\left(\frac{1}{x-c_2}\right) - \ldots - g_n\left(\frac{1}{x-c_n}\right)$$

è una funzione senza alcuna singolarità, quindi (art. 137) una costante C. Si ha dunque:

$$f(x) = \sum_{h=1}^{n} g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right) + C.$$

Se uno dei punti singolari, p. es. c_n, fosse all'infinito, invece di $g_n\left(\frac{1}{x-c_n}\right)$ dovrebbe porsi $g_n(x)$.

Funzioni con infiniti poli ed un solo punto singolare essenziale ($C3\,a$).

204. Supponiamo per semplicità che il punto singolare essenziale, il quale sarà l'unico punto limite dell'insieme dei poli, sia il punto all'infinito. Si potrà costruire una funzione intera $g(x)$

avente per radici i dati poli; allora, se $g_1(x)$ è una funzione intera soggetta alla sola condizione che le sue radici sieno diverse da quelle di $g(x)$, la più generale funzione che soddisfa alle condizioni proposte sarà:

$$f(x) = \frac{g_1(x)}{g(x)}.$$

Un altro metodo per costruire la funzione $f(x)$ è dato dal teorema di Mittag-Leffler, di cui parleremo tra poco.

Le funzioni aventi un solo punto singolare essenziale all'infinito ed infiniti poli diconsi *meromorfe* o *trascendenti fratte.*

Funzioni con infiniti poli ed un numero finito di punti singolari essenziali ($C\,3\,b$).

205. Sia A l'insieme dei poli, e sieno:

$$d_1,\ d_2, \ldots, d_n$$

i punti singolari essenziali. L'insieme A' non potrà contenere punti diversi dai punti d; supponiamo:

$$A' = (d_1,\ d_2, \ldots, d_m),$$

dove m è un numero eguale o minore di n. Potremo allora decomporre l'aggregato A in m aggregati $A_1, A_2, \ldots, A_m$ tali, che A_1 abbia il solo punto limite d_1, A_2 il solo punto limite $d_2, \ldots$, A_m il solo punto limite d_m. Costruiamo ora (ar-

ticolo 204) la funzione $f_1(x)$ avente per poli i punti dell'insieme A_1 e per unico punto singolare essenziale d_1, e analogamente le funzioni $f_2(x), \ldots, f_m(x)$; inoltre, se $m < n$, designiamo con $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_{n-m}(x)$ $n - m$ funzioni intere qualunque. La funzione cercata $f(x)$ sarà allora:

$$f(x) = \sum_{h=1}^{m} f_h(x) + \sum_{k=1}^{n-m} g_k\left(\frac{1}{x - d_{m-k}}\right) + C,$$

dove C è una costante qualunque.

Funzioni con infiniti punti singolari qualunque ($C3c$). Teorema di Mittag-Leffler. *

206. Il primo che trattò il problema della costruzione d'una funzione avente date singolarità fu il Mittag-Leffler, il quale, partito nel 1876 dal caso più semplice (quello dell'art. 204), andò via via estendendo il suo metodo a casi sempre più generali.

Noi cominceremo coll'esporre il teorema che porta il nome di Mittag-Leffler per un caso un po' meno semplice di quello dell'art. 204, ma che non offre alcuna maggior difficoltà.

Supponiamo che i punti singolari costituiscano un insieme avente per unico punto limite il punto

* Bucca 33, Casorati 34, Cousin 42, Frenzel 56, Goursat 59, Hermite 77, Krause 86, Mittag-Leffler 112, 114, 115, 117, 118, 119, 122, 125, 128, Pincherle 149, 154, Schering 185, Vitali 201, Weierstrass 215.

all'infinito. Tale insieme sarà numerabile, ed inoltre i suoi punti potranno disporsi in ordine crescente di modulo, sicchè, denotando con $c_1, c_2, \ldots$ i punti singolari diversi dal punto all'infinito, e che supporremo pure diversi dall'origine, si avrà:

$$|c_1| \leq |c_2| \leq \ldots, \quad \lim_{h=\infty} c_h = \infty.$$

Supponiamo ancora che sieno date le caratteristiche $g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)$ dei punti c_h.

L'idea che si presenta più ovvia è quella di applicare al caso attuale il procedimento dell'articolo 203, costruendo la funzione:

$$\sum_{h=1}^{\infty} g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right) + C.$$

Ma è chiaro che la serie scritta non sarà in generale convergente per tutti i valori x diversi dai valori c_h. Il concetto di Mittag-Leffler consiste in questo: aggiungere a ciascun termine della serie un polinomio tale, che essa divenga convergente.

A tal uopo, presa ad arbitrio una serie convergente a termini positivi $\sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h$, si osservi che la funzione $g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)$, non avendo altro punto singolare oltre c_h, sarà rappresentata nell'intorno dell'origine da una serie di potenze il cui raggio di convergenza sarà $|c_h|$; si avrà cioè:

$$g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{hk} x^k \quad \text{per} \quad |x| < |c_h|.$$

La serie del secondo membro sarà inoltre equiconvergente in ogni cerchio col centro nell'origine di raggio $< | c_h |$; potrà quindi trovarsi un numero m_h tale che sia in tutto un tal cerchio:

$$\left| \sum_{k=m_h}^{\infty} a_{hk} x^k \right| < \varepsilon_h ,$$

ossia:

$$\left| g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) - \sum_{k=1}^{m_h-1} a_{hk} x^k \right| < \varepsilon_h .$$

Dopo ciò, preso un cerchio di raggio ρ col centro nell'origine non passante per alcuno dei punti c, e supposto $| c_q | < \rho < | c_{q+1} |$, si avrà per tutti i punti di questo cerchio:

$$\sum_{h=q+1}^{\infty} \left[g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) - \sum_{k=1}^{m_h-1} a_{hk} x^k \right] < \sum_{h=q+1}^{\infty} \varepsilon_h ,$$

e però, pel lemma di Weierstrass, il primo membro potrà convertirsi in una serie di potenze:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{qk} x^k$$

convergente entro il cerchio ρ. D'altra parte l'espressione:

$$\sum_{h=1}^{q} \left[g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) - \sum_{k=1}^{m_h-1} a_{hk} x^k \right],$$

che è la somma d'un numero *finito* di funzioni regolari in ogni punto tranne in uno dei punti $c_1, c_2, \ldots, c_q$, costituirà una funzione della stessa

natura; quindi l'espressione:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \left[g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) - \sum_{k=1}^{m_h-1} a_{hk}\, x^k \right] \quad (1)$$

rappresenterà una funzione regolare in tutti i punti del cerchio ρ tranne tutt'al più i punti $c_1, c_2, \ldots, c_q$. Ora ρ è quantità arbitraria, e l'espressione (1) è indipendente da ρ; quindi può concludersi che la (1) rappresenta una funzione analitica regolare in ogni punto del piano a distanza finita, eccettuati tutt'al più i punti $c_1, c_2, \ldots$ Per vedere come questa funzione si comporta in un punto c_s, basta osservare come, col ragionamento esposto, si possa concludere che la funzione:

$$F(x) - \left[g_s\left(\frac{1}{x - c_s}\right) - \sum_{k=1}^{m_s-1} a_{sk}\, x^k \right] =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty}{}^{(s)} \left[g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) - \sum_{k=1}^{m_h-1} a_{hk}\, x^k \right],$$

dove l'indice superiore s indica l'esclusione del termine s-esimo, è regolare in tutti i punti del piano diversi dai punti $c_1, c_2, \ldots, c_{s-1}, c_{s+1}, \ldots$, quindi anche nel punto c_s; ora, poichè $\sum_{k=1}^{m_s-1} a_{sk}\, x^k$, essendo un polinomio, è regolare per ogni valore finito di x, sarà regolare in c_s anche la funzione:

$$F(x) - g_s\left(\frac{1}{x - c_s}\right),$$

cioè $g_s\left(\frac{1}{x - c_s}\right)$ sarà la caratteristica della fun-

zione $F(x)$ relativa al punto c_s. Pertanto $F(x)$ soddisfa alle condizioni volute.

Se $\Phi(x)$ è un'altra funzione che soddisfa alle stesse condizioni, la differenza $\Phi(x) - F(x)$ sarà una funzione regolare per ogni valor finito di x, cioè una funzione intera $g(x)$; e l'espressione più generale della funzione cercata sarà:

$$\Phi(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \left[g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) - \sum_{k=0}^{m_h - 1} a_{hk}\, x^k \right] + g(x).$$

Si può adunque enunciare il risultato seguente: *Dati infiniti punti* $c_1, c_2, \ldots,$ *tali che:*

$$|c_1| \leq |c_2 \leq \ldots, \qquad \lim_{h=\infty} c_h = \infty,$$

e date infinite funzioni:

$$g_1\left(\frac{1}{x - c_1}\right), \quad g_2\left(\frac{1}{x - c_2}\right), \ldots,$$

dove le g denotano funzioni intere dei loro argomenti, è possibile in infiniti modi costruire una funzione $\Phi(x)$ *regolare in ogni punto del piano a distanza finita tranne i punti* $c_1, c_2, \ldots,$ *ed avente in questi punti rispettivamente le caratteristiche* $g_1\left(\frac{1}{x - c_1}\right), g_2\left(\frac{1}{x - c_2}\right), \ldots$ *(teorema di Mittag-Leffler).*

207. Fra il teorema di Mittag-Leffler e quello di Weierstrass passa una stretta connessione.

Supponiamo che i punti $c_1, c_2, \ldots$ sieno tutti poli semplici col residuo 1; si ha allora:

$$g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) = \frac{1}{x - c_h},$$

e questa funzione, per $|x| < |c_h|$, si sviluppa nella serie:

$$\frac{1}{x - c_h} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{c_h^{k+1}},$$

quindi la funzione cercata è:

$$\Phi(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{x - c_h} + \sum_{k=0}^{m_h - 1} \frac{x^k}{c_h^{k+1}} \right] + g(x)$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{x - c_h} + \frac{x^{m_h} - c_h^{m_h}}{c_h^{m_h}(x - c_h)} \right] + g(x)$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{m_h}}{c_h^{m_h}(x - c_h)} + g(x).$$

Ora, se si pone $g(x) = l'(x)$, dove $l(x)$ è una funzione intera, e:

$$f(x) = e^{l(x)} \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

si ha (art. 172), quando si prenda $m_h = r_h$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \Phi(x).$$

208. Passiamo ora ad esporre le ricerche più generali di Mittag-Leffler.

Sia A un aggregato di punti isolato, e quindi numerabile, sicchè i suoi elementi potranno designarsi con $c_1, c_2, \ldots$; di più gli aggregati A e A'

non avranno alcun elemento comune. Può avvenire che, togliendo dal piano i punti dell'aggregato $A + A'$, rimanga una superficie tutta d'un pezzo, ossia connessa; come può avvenire invece che questo aggregato divida il piano in due o più, od anche infinite, parti separate. Un esempio del primo caso si ha quando A è l'insieme delle radici d'una funzione intera; un esempio del secondo può costruirsi come segue.

Prendasi una successione crescente di valori positivi:

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \tag{1}$$

avente un certo limite finito ρ; e poscia, ordinati i numeri razionali compresi fra 0 e 2π in serie semplice:

$$\theta_1, \theta_2, \ldots$$

in uno degl'infiniti modi in cui ciò è possibile (art. 27), si ponga:

$$c_1 = \gamma_1 e^{i\theta_1}, \qquad c_2 = \gamma_2 e^{i\theta_2}, \ldots \tag{2}$$

Indicando con A l'aggregato dei punti c, l'aggregato A' sarà costituito, come è facile vedere, da tutti i punti della circonferenza di raggio ρ col centro nell'origine. In questo caso dunque l'aggregato $A + A'$ divide il piano in due parti separate, l'una P costituita dall'esterno del cerchio ρ, l'altra Q dal suo interno toltine i punti c.

È da notarsi che nell'esempio considerato l'aggregato $A + A'$ forma il *contorno completo* della parte Q. Infatti ciascun suo punto appartiene al contorno di Q, giacchè in ogni intorno d'un punto

qualunque di $A + A'$ vi sono punti appartenenti a Q, e inoltre non v'è alcun altro punto del piano che appartenga al contorno di Q.

Ciò non avviene in tutti i casi; può accadere al contrario che $A + A'$ non formi il contorno completo di alcuna delle parti in cui esso divide il piano. Prendiamo, per esempio, oltre la successione (1), un'altra successione:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots$$

decrescente e avente ancora per limite ρ, e supponiamo l'aggregato A composto dei punti c definiti dalle (2) e dei punti:

$$d_1 = \delta_1 e^{i\theta_1}, \qquad d_2 = \delta_2 e^{i\theta_2}, \ldots \tag{3}$$

L'aggregato A' consterà come prima di tutti i punti della circonferenza ρ; e quindi $A + A'$ dividerà il piano in due parti: l'esterno del cerchio ρ toltine i punti (3), e l'interno di esso toltine i punti (2). Ma $A + A'$ non costituirà il contorno completo nè dell'una nè dell'altra di queste parti.

209. Supponiamo dunque dapprima che l'aggregato $A + A'$ non divida il piano in più parti separate. Sia dato, oltre l'aggregato A, un aggregato numerabile di funzioni:

$$g_1\left(\frac{1}{x - c_1}\right), \quad g_2\left(\frac{1}{x - c_2}\right), \ldots, \tag{1}$$

dove ciascuna delle g è una funzione intera del proprio argomento. *

---

* Se c_h fosse il punto all'infinito, invece di $g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$ dovrebbe porsi $g_h(x)$ (art. 96).

Vogliamo costruire una funzione analitica che sia regolare in tutto il piano, eccettuati i punti di $A + A'$, e che nei punti di A abbia le caratteristiche (1). *

L'insieme delle distanze di un punto c_h dai punti dell'insieme A' ha un limite inferiore non nullo ρ_h, giacchè, se esso avesse per limite inferiore 0, c_h sarebbe punto limite di A', ossia apparterrebbe ad A'', e quindi (art. 7) ad A', ciò che è impossibile perchè A è isolato. Però la successione $\rho_1, \rho_2, \ldots$ ha per limite zero. Infatti, se essa avesse un limite positivo σ, presa comunque la quantità positiva $\tau < \sigma$, potrebbe assegnarsi un numero m tale che per ogni $h > m$ fosse $\rho_h > \tau$. Allora l'insieme dei punti $c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots$ non potrebbe avere per punto limite alcuno dei punti di A'; ma d'altra parte tale insieme ammette almeno un punto limite, il quale deve far parte di A': donde la contraddizione.

Poichè dunque $\lim\limits_{h=\infty} \rho_h = 0$, noi potremo prendere nell'aggregato A' infiniti punti $d_1, d_2, \ldots$ (non necessariamente tutti fra loro diversi) tali che sia:

$$\lim_{h=\infty} | c_h - d_h | = 0.$$

Dopo ciò, se, centrando in d_h, descriviamo una circonferenza C_h contenente nel suo interno il punto c_h, la funzione $g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$, la quale è re-

* È quasi inutile notare, che si passa da questo problema a quello più speciale dell'art. 206 supponendo che A' consti del solo punto all'infinito.

golare all' esterno di tale circonferenza, potrà quivi svilupparsi in serie di potenze di $\frac{1}{x-d_h}$:

$$g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{hk}\,(x-d_h)^{-k}.$$

Ponendo:

$$a_{hk}=b_{hk}\,(c_h-d_h)^k,$$

tale sviluppo può scriversi:

$$g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)=\sum_{k=0}^{\infty} b_{hk}\left(\frac{c_h-d_h}{x-d_h}\right)^k.$$

Esso è equiconvergente all'esterno di qualunque circonferenza concentrica a C_h e di raggio maggiore, cioè per tutti i valori x per cui:

$$\left|\frac{c_h-d_h}{x-d_h}\right|<\varepsilon, \tag{2}$$

essendo ε una quantità qualsiasi minore di 1. Scelta quindi ad arbitrio una successione di quantità positive $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ tali che $\sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h$ sia convergente, potrà trovarsi, per ciascun valore di h, un numero m_h tale che per tutti i valori di x che soddisfanno alla condizione (2) sia:

$$\left|\sum_{k=m_h}^{\infty} b_{hk}\left(\frac{c_h-d_h}{x-d_h}\right)^k\right|<\varepsilon_h,$$

ossia:

$$g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)-\sum_{k=0}^{m_h-1} b_{hk}\left(\frac{c_h-d_h}{x-d_h}\right)^k<\varepsilon_h.$$

Consideriamo ora la funzione:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \left[g_h \left(\frac{1}{x - c_h} \right) - \sum_{k=0}^{m_h - 1} b_{hk} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h} \right)^k \right].$$

Se x_0 è un punto del piano non appartenente nè ad A nè ad A', il limite inferiore delle sue distanze dai punti di $A + A'$ non sarà zero; giacchè, in tal caso x_0 apparterrebbe ad A', oppure ad A'' che è contenuto in A'. Potrà quindi descriversi un cerchio γ di centro x_0 non contenente nel suo interno nè sul contorno punti di A o di A'. Detto δ il limite inferiore delle distanze dei punti del cerchio da quelli di $A + A'$, δ sarà una quantità diversa dc zero. D'altra parte, siccome:

$$\lim_{h=\infty} | c_h - d_h | = 0,$$

può trovarsi un numero n tale che per ogni $h > n$ sia $| c_h - d_h | < \varepsilon \delta$. Si avrà allora per tutti i punti x del cerchio γ:

$$\left| \frac{c_h - d_h}{x - d_h} \right| < \varepsilon,$$

e quindi:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{n} \left[g_h \left(\frac{1}{x - c_h} \right) - \sum_{k=0}^{m_h - 1} b_{hk} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h} \right)^k \right] +$$
$$+ \sum_{h=n+1}^{\infty} \sum_{k=m_h}^{\infty} b_{hk} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h} \right)^k.$$

Il primo termine del 2° membro è una somma d'un numero finito di funzioni analitiche regolari in γ; al secondo termine può applicarsi (cfr. ar-

ticolo 206) il lemma di Weierstrass. Quindi $F(x)$ è una funzione regolare in γ. Si dimostra poi, come nell'art. citato, che $F(x)$ ha la caratteristica $g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)$ nel punto c_h.

Se $\Phi(x)$ è un'altra funzione avente le stesse proprietà di $F(x)$, la differenza $\Phi(x) - F(x)$ sarà una funzione regolare almeno in tutti i punti del piano non appartenenti ad A'. Quindi la forma più generale della funzione cercata è:

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left[g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right) - \sum_{k=0}^{m_h-1} b_{hk}\left(\frac{c_h-d_h}{x-d_h}\right)^k\right] + l(x),$$

dove $l(x)$ denota una funzione che non può avere punti singolari non appartenenti ad A'.

210. Se l'aggregato $A + A'$ divide il piano in più parti separate, e forma il contorno completo d'una di esse P, l'espressione testè costruita rappresenta in P una funzione analitica che soddisfa alle condizioni volute e che non può continuarsi fuori di quel campo. Nelle altre parti del piano essa rappresenta altre funzioni analitiche.

211. Le ricerche esposte possono considerarsi sotto un altro punto di vista.

Sia data una funzione analitica $\Psi(x)$, e sia I l'insieme dei suoi punti singolari. L'insieme I sarà chiuso (art. 126), e però si avrà:

$$I = I' + J,$$

dove J è un insieme isolato, che sarebbe nullo quando I fosse perfetto. Noi non faremo questa ipotesi. Poichè J è contenuto in I, J' sarà con-

tenuto in I'; poniamo dunque:

$$I' = J' + K,$$

donde:

$$I = J + J' + K.$$

Ne segue:

$$I' = M(J', J'', K'),$$

ossia, poichè J'' è contenuto in J':

$$I' = M(J', K'),$$

e quindi:

$$M(J', K') = J' + K.$$

Cioè i punti di K appartengono o a J' o a K'. Ma essi non possono appartenere a J', quindi appartengono necessariamente a K'; sicchè K è un insieme concentrato.

Sieno $c_1, c_2, \ldots$ i punti dell'insieme isolato, e quindi numerabile, J.

Applicando il teorema di Laurent, noi potremo determinare la caratteristica $g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$ della funzione data $\Psi(x)$ in ciascun punto c_h di J; poi potremo costruire (art. 209) la funzione $F(x)$ regolare in tutti i punti del piano (o d'un campo avente per contorno completo $I + I'$), ed avente nei punti di J le caratteristiche $g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$. Allora la funzione:

$$\Psi(x) - F(x) = \Omega(x)$$

sarà regolare anche nei punti di J, e non potrà avere altri punti singolari che i punti di I'.

Abbiamo ottenuto così il risultato seguente:

Data una funzione $\Psi(x)$ avente dei punti singolari isolati, si può costruire una funzione $\Omega(x)$ la quale sia regolare, oltre che in tutti i punti in cui lo è $\Psi(x)$, anche in questi punti.

212. Il legame già rilevato fra il teorema di Mittag-Leffler e quello di Weierstrass offre il modo di generalizzare notevolmente quest'ultimo teorema in base ai risultati degli articoli precedenti. Per brevità ci limitiamo ai soli enunciati:

Sia $A(c_1, c_2, \ldots)$ un insieme isolato tale che $A + A'$, o non divida il piano in più parti, o, dividendolo, formi il contorno completo d'una di esse P. Può costruirsi una funzione analitica, esistente rispettivamente nell'intero piano esclusi i punti di $A + A'$, o nel campo P, e avente nei vari punti c_h degli zeri o dei poli di ordini prefissi n_h. * *La espressione più generale di tale funzione è:*

$$F(x) = l(x) \cdot \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{c_h - d_h}{x - d_h}\right)^{n_h} e^{n_h \sum_{k=1}^{m_h} \frac{1}{k} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h}\right)^k}, \quad (1)$$

dove le d_h, m_h hanno lo stesso significato già ad esse attribuito (art. 209), *ed $l(x)$ è una funzione regolare e diversa da zero, oltre che nel campo in cui è regolare la funzione da costruirsi, anche nei punti di A.*

---

* n_h è un numero intero positivo per gli zeri, negativo pei poli.

Data una funzione $\Psi(x)$ avente degli zeri e dei poli, si può trovare un'altra funzione $\Omega(x)$ regolare e diversa da zero, non solo nei punti in cui $\Psi(x)$ è regolare, ma anche nei suoi zeri e nei suoi poli.

213. Le proposizioni testè enunciate ci permettono di procedere più innanzi nella via intrapresa nell'art. 211.

Abbiasi una funzione $\Psi(x)$, e sia ancora $J(c_1, c_2, \ldots)$ l'insieme dei suoi punti singolari isolati. Pel teorema di Laurent si avrà, nell'intorno di c_h:

$$\Psi(x) = g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) + P_h(x - c_h),$$

dove $P_h(x - c_h)$ è una serie di potenze di $x - c_h$ convergente entro un certo cerchio, che non c'importa di determinare. Indicando con p_h un numero intero positivo qualunque, poniamo:

$$P_h(x - c_h) = e_{h0} + e_{h1}(x - c_h) + e_{h2}(x - c_h)^2 + \\ + \ldots + e_{hp_h-1}(x - c_h)^{p_h-1} + e_{hp_h}(x - c_h)^{p_h} + \ldots,$$

quindi:

$$\Psi(x) = g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) + e_{h0} + e_{h1}(x - c_h) + \ldots + \\ + e_{hp_h-1}(x - c_h)^{p_h-1} + e_{hp_h}(x - c_h)^{p_h} + \ldots;$$

inoltre:

$$g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) + e_{h0} + e_{h1}(x - c_h) + \ldots + \\ + e_{hp_h-1}(x - c_h)^{p_h-1} = (x - c_h)^{p_h} f_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right),$$

$$e_{hp_h}(x - c_h)^{p_h} + \ldots = (x - c_h)^{p_h} Q_h(x - c_h),$$

dove $f_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)$ è una funzione intera di $\frac{1}{x-c_h}$ priva del termine costante, e $Q_h(x-c_h)$ è una serie di potenze di $x-c_h$. Si avrà allora:

$$\Psi(x) = (x-c_h)^{p_h} f_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right) + \\ + (x-c_h)^{p_h} Q_h(x-c_h). \qquad (1)$$

Noi vogliamo mostrare che si può costruire una funzione, la quale sia regolare in tutti i punti in cui lo è $\Psi(x)$, e inoltre nell'intorno di ciascun punto c_h coincida con $\Psi(x)$ non solo nelle potenze negative di $x-c_h$ (ossia nella caratteristica), ma anche nelle potenze positive sino ad un certo grado prefisso p_h-1; o — come può dirsi più brevemente — che rappresenti $\Psi(x)$ nell'intorno di ciascun punto c_h *con un'approssimazione prefissa.*

A tal uopo si costruisca anzitutto la $F(x)$ secondo la formola (1) dell'art. 212, in cui si supponga $l(x) = 1$, $n_h = p_h$:

$$F(x) = \prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{c_h-d_h}{x-d_h}\right)^{p_h} e^{p_h \sum_{k=1}^{m_h}\frac{1}{k}\left(\frac{c_h-d_h}{x-d_h}\right)^k}. \qquad (2)$$

La funzione:

$$\frac{(x-c_h)^{p_h} f_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)}{F(x)}$$

sarà regolare nel punto c_h o, tutt'al più, avrà in esso una singolarità isolata, e quindi pel teorema

di Laurent sarà:

$$\frac{(x-c_h)^{p_h} f_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)}{F(x)} = \varphi_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right) + R_h(x-c_h), \quad (3)$$

dove $\varphi_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)$ è una funzione intera di $\frac{1}{x-c_h}$, e $R_h(x-c_h)$ è una serie di potenze di $x-c_h$. Costruiamo ora (art. 209) una funzione $\Theta(x)$ regolare dappertutto dove lo è $\Psi(x)$, e avente in c_h la caratteristica $\varphi_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)$. Si avrà allora nell'intorno di c_h:

$$\Theta(x) = \varphi_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right) + S_h(x-c_h),$$

dove $S_h(x-c_h)$ è una serie di potenze di $x-c_h$, e quindi, per la (3):

$$\frac{(x-c_h)^{p_h} f_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)}{F(x)} = \Theta(x) - T_h(x-c_h),$$

dove:

$$T_h(x-c_h) = S_h(x-c_h) - R_h(x-c_h)$$

è una serie di potenze di $x-c_h$. Ne segue:

$$F(x)\,\Theta(x) = (x-c_h)^{p_h} f_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right) + \\ + F(x)\,T_h(x-c_h);$$

ma, dalla (2), risulta nell'intorno di c_h:

$$F(x) = (x - c_h)^{p_h} U_h(x - c_h),$$

dove $U_h(x - c_h)$ è una serie di potenze di $x - c_h$, quindi:

$$F(x)\,\Theta(x) = (x - c_h)^{p_h} f_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) + \\ + (x - c_h)^{p_h} V_h(x - c_h),$$

dove:

$$V_h(x - c_h) = T_h(x - c_h)\,U_h(x - c_h)$$

è ancora una serie di potenze di $x - c_h$. Confrontando colla (1), si vede che il prodotto $F(x)\,\Theta(x)$ rappresenta la funzione data $\Psi(x)$ coll'approssimazione voluta.

214. Si è trovato che, se l'insieme I dei punti singolari d'una funzione $\Psi(x)$ non è perfetto, e se:

$$I = I' + J,$$

può costruirsi un'altra funzione, che diremo $\Psi_1(x)$, non avente più alcuna singolarità nei punti di J. Può avvenire però che $\Psi_1(x)$ abbia a sua volta dei punti singolari isolati; così se, come accade in generale, i punti di I' sono tutti punti singolari per la $\Psi_1(x)$, e se I' non è perfetto, posto:

$$I' = I'' + J_1,$$

i punti di J_1 sono punti singolari isolati di $\Psi_1(x)$. Si potrà costruire allora una funzione $\Psi_2(x)$ non avente più alcuna singolarità nei punti di J_1; e

così di seguito. Ora si domanda: tale processo di riduzione conduce infine ad una funzione senza punti singolari isolati, ossia l'insieme dei cui punti singolari è perfetto?

Ricordiamo (art. 76) che, se I è un aggregato chiuso, esiste un primo numero ordinale della prima o della seconda classe tale che $I^{(\alpha)}$ è perfetto (o nullo), e che si ha:

$$I = \sum_{\gamma<\alpha} (I^{(\gamma)} - I^{(\gamma+1)}) + I^{(\alpha)};$$

gli aggregati $I^{(\gamma)} - I^{(\gamma+1)}$ sono isolati, e quindi numerabili, e sono quelli stessi che designammo già con J, $J_1, \ldots$, sicchè possiamo scrivere:

$$I = \sum_{\gamma<\alpha} J_\gamma + I^{(\alpha)}.$$

Indichiamo con $c_{01}, c_{02}, \ldots$ gli elementi di J, con $c_{\gamma 1}, c_{\gamma 2}, \ldots$ quelli di J_γ, e prendiamo ad arbitrio dei numeri positivi:

$$\varepsilon_{\gamma 1}, \varepsilon_{\gamma 2}, \ldots \qquad (\gamma < \alpha)$$

tali che:

$$\sum_{\substack{h=1,2,\ldots \\ \gamma<\alpha}} \varepsilon_{\gamma h}$$

sia convergente. Se:

$$g_{01}\left(\frac{1}{x - c_{01}}\right), \quad g_{02}\left(\frac{1}{x - c_{02}}\right), \ldots$$

sono le caratteristiche di $\Psi(x)$ ne' suoi punti singolari isolati $c_{01}, c_{02}, \ldots$, potremo (art. 209), facendo uso dei numeri $\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}, \ldots$, costruire una funzione

$F(x)$ avente in quei punti le stesse caratteristiche, e la:

$$\Psi_1(x) = \Psi(x) - F(x)$$

sarà regolare nei punti stessi. Se poi:

$$g_{11}\left(\frac{1}{x - c_{11}}\right), \quad g_{12}\left(\frac{1}{x - c_{12}}\right), \ldots$$

sono le caratteristiche di $\Psi_1(x)$ nei suoi punti singolari isolati $c_{11}, c_{12}, \ldots$, potremo, facendo uso dei numeri $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \ldots$, costruire una funzione $F_1(x)$ avente in quei punti le stesse caratteristiche, e la:

$$\Psi_2(x) = \Psi_1(x) - F_1(x) = \Psi(x) - F(x) - F_1(x)$$

sarà regolare, non solo nei punti $c_{01}, c_{02}, \ldots$, ma anche nei punti $c_{11}, c_{12}, \ldots$ Così proseguendo, si giungerà ad una funzione:

$$\Psi_\omega(x) = \Psi(x) - \sum_{\gamma=0}^{\infty} F_\gamma(x),$$

la quale sarà regolare nei punti di $J, J_1, \ldots$ È chiaro poi che si potrà continuare lo stesso processo finchè si giungerà ad una funzione:

$$\Psi_\alpha(x) = \Psi(x) - \sum_{\gamma<\alpha} F_\gamma(x),$$

la quale non potrà avere altri punti singolari che i punti dell'insieme perfetto $I^{(\alpha)}$.

Resta a dimostrarsi soltanto che $\sum_{\gamma<\alpha} F_\gamma(x)$ rappresenta una funzione analitica. A tal uopo si osservi che, come risulta dal processo svolto nell'articolo 209, se si considera un punto non appartenente nè a J_γ nè a J'_γ, e si prende un intorno di esso non contenente punti di alcuno di questi

due aggregati (ciò che è sempre possibile), si ha, per tutti i punti x di tale intorno:

$$| F_\gamma(x) | < \sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_{\gamma h};$$

ma $\sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_{\gamma h}$ è parte d'una serie convergente a termini positivi, quindi è essa stessa convergente: indicandone la somma con η_γ, si ha:

$$| F_\gamma(x) | < \eta_\gamma. \qquad (1)$$

Ora J_γ è parte di I, quindi J'_γ e parte di I', e per conseguenza di I. Se pertanto x_0 è un punto del campo in cui $\Psi(x)$ è regolare, noi potremo prendere un intorno di questo punto non contenente alcun punto di I (essendo I chiuso), e in quest'intorno sussisterà la relazione (1) per ogni $\gamma < \alpha$. Osserviamo che i numeri $\gamma < \alpha$ formano un aggregato numerabile (art. 62); sicchè può stabilirsi una corrispondenza biunivoca e completa tra questi numeri e quelli della serie naturale 0, 1, 2,... Indichiamo con μ il numero di questa serie che corrisponde al numero γ, e poniamo:

$$F_\gamma(x) = H_\mu(x), \qquad \eta_\gamma = \theta_\mu;$$

la relazione (1) diverrà:

$$| H_\mu(x) | < \theta_\mu,$$

e sommando per $\mu = 1, 2, \ldots$ si avrà:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left| H_\mu(x) \right| < \sum_{\mu=1}^{\infty} \theta_\mu.$$

La serie del secondo membro è convergente, perchè la sua somma non è altro che la somma della

serie $\sum\limits_{\gamma<\alpha}^{h=1,2,\ldots} \varepsilon_{\gamma h}$; quindi la serie $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty} H_\mu(x)$ sarà equiconvergente nell'intorno considerato, e, pel lemma di Weierstrass, rappresenterà in quell'intorno una funzione analitica regolare nel punto x_0.

Si dimostra poi come nell'art. 209 che in un intorno d'un punto c_{0h} dell'insieme J la differenza:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} H_\mu(x) - g_{0h}\left(\frac{1}{x - c_{0h}}\right)$$

è regolare.

Sia ora β uno qualunque dei numeri γ, e scriviamo:

$$\sum_{\beta\leq\gamma<\alpha} F_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty}{}^{(\beta)} H_\mu(x),$$

dove la lettera β posta a destra del segno Σ nel secondo membro vuol denotare che dalla somma si devono togliere tutti i termini il cui indice μ, nella corrispondenza poc'anzi considerata, ha per omologhi numeri γ più piccoli di β. Si dimostra allora, col solito metodo, che la differenza:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}{}^{(\beta)} H_\mu(x) - g_{\beta h}\left(\frac{1}{x - c_{\beta h}}\right)$$

è regolare nell'intorno di $c_{\beta h}$.

Dopo ciò risulta stabilito che le espressioni trovate rappresentano funzioni analitiche aventi le proprietà volute; e, in particolare, che $\Psi_\alpha(x)$ è una funzione analitica regolare, non solo in tutti i punti in cui lo è $\Psi(x)$, ma anche in tutti quelli dell'insieme J.

PARTE TERZA.

COMPLEMENTI
DELLA TEORIA DELLE FUNZIONI ANALITICHE.

Ricerche di Poincaré, Hadamard, Borel ed altri intorno alle funzioni intere. * Teoremi di Picard. **

215. Si è veduto come lo studio delle funzioni intere sia, specialmente in alcuni punti, tuttora assai incompleto. Colle sue pubblicazioni del 1882 e 1883, Poincaré ha aperto una nuova via per la risoluzione dei numerosi problemi che presenta la teoria di tali funzioni. I suoi concetti, che hanno un carattere nettamente distinto da quelli che informano le ricerche precedentemente esposte, furono adottati più innanzi da Hadamard, da Borel e da altri, i quali se ne valsero per giungere a risultati importantissimi. Però, e per la

* Bassi 8, Borel 17, 27, 29, Desaint 44, 45, 46, Hadamard 64, 65, 68, 69, Jensen 84, Petersen 138, Poincaré 162, 163, Schaper 183, Schou 187, 188.

** Borel 15, 17, 28, 29, Cazzaniga 36, Farkas 53, Picard 141, 143, 145, 146, 147, Schaper 183.

grande complicazione delle dimostrazioni, che le rende poco adatte ad essere accolte in un Manuale, e perchè parecchie di esse si fondano sopra teorie non elementari, come gli integrali curvilinei, la formola di Stirling, ecc., * noi dobbiamo limitarci a riferire soltanto le definizioni ed i principali risultati.

216. Le ricerche di cui abbiamo ad occuparci si aggirano intorno ai seguenti punti principali:

Relazione tra il genere d'una funzione intera e la rapidità con cui cresce il massimo del suo modulo al tendere di x ad infinito;

Relazione tra il genere d'una funzione intera e la rapidità con cui decrescono i suoi coefficienti al crescere del loro indice.

Con esse si connettono alcuni notevoli teoremi dimostrati da Picard sino dal 1879, ed alcune generalizzazioni di tali teoremi.

217. Il genere d'una funzione intera di prima classe dà, in qualche modo, una misura del grado di rapidità con cui crescono i moduli delle sue radici al crescere del loro indice. Però si è trovato necessario d'introdurre un nuovo elemento atto a misurare tale rapidità con maggiore esattezza: l'*ordine reale.* **

---

* Farebbe opera sommamente utile ed interessante chi si accingesse a raccogliere in ordine sistematico e a dimostrare per via elementare i risultati a cui alludiamo.

** Così detto in opposizione all'*ordine apparente*, che si definirà più innanzi (art. 219). Tale denominazione è dovuta a Borel; Schaper usa invece *Konvergenzexponent*, e chiama *Ordnung* un numero che, almeno per le funzioni semplici, è il reciproco dell'ordine reale.

Sieno $c_1, c_2, \ldots$ gli zeri d'una funzione intera, e sia al solito $\gamma_h = |c_h|$.

I numeri reali positivi α si dividono in due classi, secondochè rendono divergente o convergente la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\alpha}}$. I numeri della prima classe sono evidentemente tutti minori di quelli della seconda; quindi esiste un *elemento di separazione* ρ delle due classi, il quale è unico e determinato. Questo è l'*ordine reale*. In altri termini, dicesi ordine reale quel numero reale e positivo ρ avente la proprietà che, qualunque sia il numero positivo ε, $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\rho-\varepsilon}}$ è divergente e $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\rho+\varepsilon}}$ è convergente.

Riguardo alla convergenza della serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\rho}}$ nulla può dirsi in generale.

Se p è il genere della funzione considerata, quando ρ non è un numero intero p è il massimo intero in esso contenuto; quando ρ è intero p può essere eguale a ρ o a $\rho - 1$.

218. *Se* $f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ *è una funzione di rango* p, *si ha:*

$$\lim_{x=\infty} e^{-l|x|^p} f(x) = 0,$$

qualunque sia la quantità positiva l.

Segue di qui che: *Se* $M(\xi)$ *è il massimo dei valori assoluti di* $f(x)$ *corrispondenti ai valori di*

x di modulo ξ, si ha, per valori di ξ abbastanza grandi:

$$M(\xi) < e^{l\xi^{p+1}}.$$

Inoltre i coefficienti di $f(x)$ soddisfanno alla relazione seguente:

$$\lim_{h=\infty} a_h (h!)^{\frac{1}{p+1}} = 0.$$

Il concetto di ordine reale permette di precisare meglio il secondo dei precedenti teoremi, almeno pel caso in cui $f(x)$ è semplice: *Se $f(x)$ è una funzione semplice di ordine reale ρ, si ha, per ξ abbastanza grande, e qualunque sia la quantità positiva ε:*

$$M(\xi) < e^{\xi^{\rho+\varepsilon}}.$$

Se, in particolare, ρ rende convergente la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\rho}}$ (v. art. preced.), *si ha, qualunque sia la quantità positiva l:*

$$M(\xi) < e^{l\xi^{\rho}}.$$

219. Se la funzione $f(x)$ è tale che per ξ abbastanza grande e per ε arbitrariamente piccola si ha:

$$M(\xi) < \varepsilon^{\xi^{\rho'+\varepsilon}},$$

mentre vi sono valori di ξ più grandi di qualun-

que valore assegnato per cui:

$$M(\xi) > e^{\xi^{\rho'-\varepsilon}},$$

ρ' si dice l'*ordine apparente* di $f(x)$.

L'ordine apparente d'una funzione non è mai minore del suo ordine reale, nè quindi del suo rango.

Se l'ordine apparente d'una funzione non è un numero intero, esso è eguale all'ordine reale.

L'ordine apparente d'una funzione semplice è eguale al suo ordine reale.

Se $f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ *è una funzione d'ordine apparente* ρ', *si ha:*

$$\frac{1}{\sqrt[h]{|a_h|}} > K h^{\frac{1}{\rho'}},$$

dove $K = (e\rho')^{-\frac{1}{\rho'}}$.

Se $f(x)$ *è una funzione d'ordine apparente* ρ', *può trovarsi una serie di circonferenze (col centro nell'origine), di raggio indefinitamente crescente, sulle quali si ha:*

$$|f(x)| > e^{-|x|^{\rho+\varepsilon}},$$

ε *essendo una quantità positiva arbitraria.*

Se $f(x)$ *è una funzione semplice d'ordine* ρ, $e^{g(x)}$ *un fattore esponenziale d'ordine apparente maggiore di* ρ, *la funzione* $e^{g(x)} f(x)$ *è d'ordine apparente maggiore di* ρ.

Se per tutti i valori di ξ *si ha:*

$$M(\xi) < e^{V(\xi)},$$

dove $V(\xi)$ è una funzione positiva crescente con ξ, indicando con s un numero maggiore di 2, con n il numero degli zeri di $f(x)$ di modulo non maggiore di $\frac{\xi}{s}$, si ha:

$$n < \frac{V(\xi)}{\lg(s-1)}.$$

220. *La somma di due funzioni di rango p è una funzione di rango p o $p+1$.*

La derivata d'una funzione di rango p è una funzione di rango p o $p+1$.

221. I teoremi che portano il nome di Picard, e che furono da lui stabiliti nel 1879 mediante la teoria delle funzioni ellittiche, sono i seguenti:

Una funzione intera $f(x)$ prende nel piano tutti i possibili valori, tranne tutt'al più uno solo. — Ossia: *Se esistono due quantità A, B tali, che le funzioni intere $f(x)-A$, $f(x)-B$ non abbiano radici, $f(x)$ si riduce ad una costante.*

Se esistono due quantità A, B tali che le funzioni intere $f(x)-A$, $f(x)-B$ abbiano un numero finito di radici, $f(x)$ si riduce ad un polinomio.

Hadamard ha generalizzato questi teoremi come segue:

Se $f(x)$ è una funzione di rango finito, e se, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ essendo due polinomi, le funzioni:

$$f(x)-\varphi(x), \quad f(x)-\psi(x)$$

hanno un numero finito di radici, $f(x)$ è un polinomio.

Un teorema, dovuto a Borel, che si può pure considerare come una generalizzazione dei teoremi di Picard, è il seguente:

Se $f(x)$ è una funzione il cui ordine apparente è un numero intero p, tra le infinite funzioni:

$$\varphi(x) f(x) - \psi(x),$$

dove $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sono due funzioni qualunque di ordine apparente minore di p, ve n'ha tutt'al più una sola il cui ordine reale sia minore di p.

Rappresentazione d'una funzione analitica. *

222. Il problema della rappresentazione d'una funzione analitica può enunciarsi così: Data una funzione analitica $f(x)$, il cui campo d'esistenza sia C, trovare un'espressione aritmetica $F(x)$ che abbia lo stesso valore di $f(x)$ in tutti i punti del campo C.

Mittag-Leffler ha risolto la questione col suo teorema, ponendo però qualche restrizione intorno alla natura del campo C, o, ciò che è lo stesso, intorno alla natura dell'insieme dei punti singolari della funzione. Risoluzioni affatto generali furono date poi da Runge, da Hilbert, da Painlevé, e più recentemente dallo stesso Mittag-Leffler.

---

* Dell'Agnola 1 *bis*, Borel 16, Bucca 32, Hilbert 78, Leau 94 *bis*, Mittag-Leffler 109 *bis*, 116, 120, 120 *bis*, 121, 123, 124, 125 *bis*, Osgood 129, Painlevé 131, 132, 133, 134, 135, Phragmén 140, Runge 182, Volterra 214.

Delle ricerche di Runge e di Painlevé daremo soltanto un breve cenno, essendo le prime fondate sulla teoria degl'integrali curvilinei,* le altre trovandosi esposte finora soltanto per sommi capi in alcune brevi comunicazioni nei *Comptes-Rendus.*

223. Runge stabilisce anzitutto il seguente teorema:

Dato un campo P, connesso o no, e un campo Q separato da P, data inoltre una funzione analitica $f(x)$ il cui campo d'esistenza contenga P, può costruirsi una funzione razionale che differisca, in valore assoluto, per meno d'una quantità prefissa σ da $f(x)$ in tutti i punti di P, e da zero in tutti i punti di Q.

Ciò premesso, sia $f(x)$ una funzione analitica del cui campo d'esistenza faccia parte un dato campo C, o che nell'interno di C abbia tutt'al più delle singolarità polari. Supposto il campo C finito (il che non diminuisce affatto la generalità), si costruisce con una certa legge una successione indefinita di campi $C_1, C_2, \ldots$ aventi le seguenti proprietà:

a) Tutti i campi $C_1, C_2, \ldots$ sono interni a C;

b) C_m è interno a C_n ogniqualvolta $m < n$;

c) Dato un punto x interno a C, può trovarsi un numero n abbastanza grande perchè C_n contenga nel suo interno x.

Si formano poi le funzioni razionali:

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \ldots,$$

* Uno studio non inutile, e probabilmente anche facile, sarebbe rifare le ricerche di Runge col metodo elementare.

aventi la proprietà che $\varphi_h(x)$ differisce da $f(x)$ per meno di $\frac{1}{h}$ entro C_h. Allora l'espressione aritmetica:

$$F(x) = \varphi_1(x) + \sum_{h=1}^{\infty} [\varphi_{h+1}(x) - \varphi_h(x)] = \lim_{h=\infty} \varphi_h(x)$$

rappresenterà la funzione analitica $f(x)$ in tutto il campo C. Infatti, preso un punto x in questo campo, e scelta ad arbitrio una quantità σ, si può trovare un numero n tale che sia $\frac{1}{n} < \sigma$, e che x sia contenuto nel campo C_n; x sarà allora contenuto in ogni campo C_h per cui $h \geqq n$, e si avrà:

$$| f(x) - \varphi_h(x) | < \frac{1}{h} \leqq \frac{1}{n} < \sigma \text{ per ogni } h \geqq n,$$

quindi:

$$f(x) = \lim_{h=\infty} \varphi_h(x),$$

e infine:

$$f(x) = F(x).$$

224. Un altro risultato importantissimo ottenuto da Runge è questo: *Dato un campo C soggetto alla sola condizione di essere connesso, esistono sempre funzioni analitiche aventi C per campo d'esistenza.*

A tal uopo egli costruisce in modo opportuno una somma d'infinite funzioni razionali equiconvergente in ogni campo interno a C, e dimostra

che la funzione analitica rappresentata da tale somma ha per punti singolari essenziali tutti i punti del contorno di C.

225. Painlevé e Hilbert sono giunti a risultati analoghi a quelli di Runge.

Essi hanno dimostrato che, se C è un campo finito, soggetto all'unica condizione che il suo contorno sia formato d'un sol pezzo, e se $f(x)$ è una funzione regolare in C, si può trovare una serie di polinomi equiconvergente in ogni campo interno a C e che ha lo stesso valore di $f(x)$ in tutti i punti di C.

Painlevé ha dato anche una rappresentazione d'una funzione analitica mediante un prodotto infinito:

$$\prod_{h=1}^{\infty} \frac{L_h(x)}{M_h(x)} e^{R_h(x)},$$

dove le $L_h(x)$, $M_h(x)$ sono polinomi, e le $R_h(x)$ sono funzioni razionali.

Queste rappresentazioni hanno una grande arbitrarietà; ciò costituisce da un lato un vantaggio, perchè degli elementi arbitrari si può disporre a proprio agio a seconda degli scopi a cui si tende, dall'altra un danno, perchè essa sovente impedisce di rilevare dallo sviluppo stesso le proprietà caratteristiche della funzione rappresentata. L'arbitrarietà è molto minore negli sviluppi dati dal teorema di Mittag-Leffler, poichè essa si riduce ad una funzione indeterminata, regolare dappertutto dove lo è la funzione data, e di più in un insieme isolato di punti singolari di questa; nello stesso tempo lo sviluppo pone in evidenza, non

solo un'infinità (numerabile) di punti singolari della funzione, ma anche le caratteristiche di questi punti.

226. Nelle sue ricerche più recenti Mittag-Leffler osserva, che tanto nella teoria di Weierstrass come negli ordinari problemi dell'Analisi (quale p. es. la integrazione delle equazioni differenziali ordinarie) una funzione analitica è data mediante un suo *elemento* (art. 125), o, ciò che è lo stesso, mediante i valori di essa e di tutte le sue derivate in un punto qualunque del suo campo di esistenza; sicchè il problema che si considera può assai opportunamente formularsi così: *Data una successione di quantità* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *tali che la serie* $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} a_h t^h$ *abbia raggio di convergenza finito e diverso da zero, e dato un punto* c, *trovare un'espressione aritmetica che rappresenti la funzione analitica* $f(x)$ *generata dall'elemento* $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} a_h (x-c)^h$ *in tutti i punti del più gran campo in cui questa esiste ed è uniforme.*

227. Per risolvere il problema, conviene ricorrere a qualche considerazione geometrica.

Prendasi nel piano della variabile complessa un punto c; poi su ciascun raggio l uscente da c si fissi un punto x_l, per modo che la distanza:

$$|x_l - c|$$

sarà una funzione reale, positiva e ad un sol valore $\varphi(\lambda)$ dell'argomento λ del raggio l.

Data la funzione $\varphi(\lambda)$ per tutti i valori di λ non minori di 0 e minori di 2π, si dice che con ciò è determinata una *stella* di *centro* c.

La funzione $\varphi(\lambda)$ può avere per limite superiore ∞, ma non può avere per limite inferiore 0; quindi la stella è una parte di piano connessa, finita od infinita, contenente *nel suo interno* il proprio centro.

La quantità $\varphi(\lambda)$ si dirà *ascissa* della stella sul raggio l d'argomento λ.

Abbiasi una stella E di centro c. Fissato un numero intero e positivo n, si potrà, per un determinato raggio l, prendere una quantità r abbastanza piccola perchè qualunque cerchio di raggio r avente il centro in un punto del segmento di l di lunghezza $(n-1)r$ preso a partire dal centro sia contenuto in E. L'insieme di tutti i possibili valori di r ammetterà un limite superiore ρ (che è funzione di n e di λ). Il punto del raggio l che dista dal centro di $n\rho$ rappresenterà il valore complesso $c + n\rho e^{i\lambda}$, e questa espressione, considerata come funzione di λ, definirà una nuova stella, che indicheremo con E_n.

Se in particolare si fa $n = 1$, r dovrà esser tale che il centro di raggio r col centro in c sia contenuto in E; ρ sarà quindi il limite superiore dei raggi dei cerchi di centro c contenuti in E, e però sarà indipendente da λ, sicchè E_1 sarà un cerchio di raggio ρ.

Può dimostrarsi che, qualunque sia n, E_{n+1} contiene E_n. Infatti dividiamo il segmento cd del raggio l di lunghezza $n\rho$ in n parti eguali $c\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}d$, ed in $(n+1)$ parti eguali $c\beta_1$, $\beta_1\beta_2, \ldots$, $\beta_n d$; ogni cerchio di raggio $\frac{n}{n+1}\rho$ col centro in un punto qualunque di $c\beta_n$ è interno a qualche cerchio di raggio ρ avente il centro in un punto

di $c\,\alpha_{n-1}$, e quindi è interno ad E. Ne segue che la quantità r relativa al numero $n+1$ non sarà mai minore di $\frac{n}{n+1}\rho$, e lo stesso potrà dirsi quindi del suo limite superiore, che denotiamo per un istante con $\overline{\rho}$. Si avrà pertanto:

$$(n+1)\overline{\rho} \geqq n\rho,$$

il che prova l'asserto.

Finalmente tutte le E_n sono comprese in E. Infatti, dovendo il cerchio di centro $c+(n-1)\,r\,e^{i\lambda}$ e di raggio r essere tutto contenuto in E, starà pure in E il punto $c+n\,r\,e^{i\lambda}$ che ad esso appartiene; e quindi il punto $c+n\,\rho\,e^{i\lambda}$, che è il limite delle posizioni di questo punto quando r tende a ρ, starà entro E o sul contorno di E.

Dalla stella E_n possiamo dedurre n altre stelle $E_{n1}, E_{n2}, \ldots, E_{nn}$ prendendo invece di ρ, rispettivamente le quantità:

$$\rho_1 = \alpha\,\rho,\ \rho_2 = \alpha^2\,\rho, \ldots, \rho_n = \alpha^n\,\rho,$$

dove α è una quantità positiva minore di 1, che può dipendere da n. È evidente che tutte queste stelle sono contenute in E_n, e di più che $E_{n,h+1}$ è contenuta in E_{nh}.

228. Supponiamo ora che una stella E di centro c contenga nel suo interno un campo finito C. Vogliamo costruire una stella finita A, di centro c, interna ad E e contenente nel suo interno C.

È utile ricordare, che un campo M si dice *interno* ad un altro N, quando può assegnarsi una quantità positiva δ tale che tutti i punti di ogni cerchio di raggio δ col centro in qualsiasi punto di M appartengano ad N o al suo contorno.

Sia D la stella di centro c *circoscritta* al campo C, cioè avente per ascissa su ciascun raggio il limite superiore delle distanze dal centro dei punti di questo raggio che appartengono a C; essa è evidentemente finita. Poichè C è interno ad E, potrà assegnarsi una quantità δ avente per rispetto ai campi C, E la proprietà poc'anzi accennata. Sia inoltre $\varphi(\lambda)$ l'ascissa della stella D sul raggio l di argomento λ, d l'estremità di tale ascissa, R il limite superiore di $\varphi(\lambda)$ (che è una quantità finita), S il raggio d'un cerchio di centro c tutto contenuto entro E. Il cerchio di raggio δ e di centro d sta tutto in E, quindi lo stesso potrà dirsi, per ragione di omotetia, del cerchio col centro in un punto x del segmento $c\,d$ avente il raggio:

$$\frac{|x-c|}{\varphi(\lambda)}\,\delta.$$

Si descriva ora col centro in x un cerchio di raggio $k\frac{\delta}{R}$, dove:

$$k=\frac{S}{1+\frac{\delta}{R}}.$$

Se $k \leqq |x-c|$, questo cerchio sarà contenuto nel precedente, e quindi in E. Se $k > |x-c|$, si ha dalla relazione scritta:

$$|x-c|+\frac{k\,\delta}{R}<S,$$

diseguaglianza la quale ci dice che il cerchio con-

siderato è contenuto entro il cerchio di centro c e di raggio S, e quindi entro E.

Osservando che la quantità $\frac{k\delta}{R}$ è indipendente, non solo dal punto x, ma anche dal raggio l, può dirsi che un cerchio di raggio $\varepsilon = \frac{k\delta}{R}$ avente il centro in qualunque punto di D è contenuto in E, donde segue che D è interna ad E.

Se si aumentano tutte le ascisse di D nella proporzione $\frac{R + \frac{1}{2}\varepsilon}{R}$, si ottiene una stella A finita, che è ancora interna ad E. Infatti:

$$\varphi(\lambda)\frac{R + \frac{1}{2}\varepsilon}{R} = \varphi(\lambda) + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\varphi(\lambda)}{R} \leqq \varphi(\lambda) + \frac{1}{2}\varepsilon,$$

sicchè ogni cerchio di raggio $\frac{1}{2}\varepsilon$ avente il centro in qualsiasi punto di A è contenuto in E.

Costruita così la stella A, noi possiamo trovare un numero n tale, che per ogni $h \geqq n$ la stella A_h (cioè quella che si deduce da A come E_h da E) contenga C. — Sia η la quantità avente, per rispetto ai campi C, A, la proprietà della quantità più sopra definita δ, e sia T il raggio d'un cerchio di centro c contenente C nel suo interno. Detto e l'estremo dell'ascissa di D sul raggio l, e diviso ce in n parti eguali $c\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_2, \ldots$, $\gamma_{n-1}e$, perchè l'ascissa di A_n sia maggiore di

ce bisognerà che ogni cerchio di raggio $c\gamma_1$ col centro in un punto qualunque di $c\gamma_{n-1}$ sia contenuto in A. Ciò avrà luogo certamente se la lunghezza $c\gamma_1$, ossia $\frac{1}{n}ce$, non supera η, ossia se:

$$n \geqq \frac{ce}{\eta},$$

ed a maggior ragione se:

$$n \geqq \frac{T}{\eta}.$$

Siccome poi $A_{h'}$ contiene A_h per $h' > h$, potrà concludersi che, per ogni $h \geqq n$, A_h contiene C.

Finalmente, se per α si prende una funzione di n tale che α^n tenda ad 1 quando n tende ad infinito, si potrà trovare un valore di n tale, che per ogni $h \geqq n$ A_{hh} contenga C.

229. Ciò premesso, ritorniamo al problema dell'art. 226.

Diremo stella *appartenente* ad un dato elemento di funzione analitica la stella avente per ascissa su ciascun raggio il limite inferiore delle distanze dal centro dei punti di quel raggio che non appartengono al campo d'esistenza della funzione considerata.

Sia E la stella appartenente all'elemento dato, C un campo finito contenuto in E; si formi, col processo esposto, la corrispondente stella A, e si determini n in modo che, per ogni $h \geqq n$, A_{hh} contenga C. Indichiamo con g il limite superiore del modulo $f(x)$ in A (il contorno compreso), e po-

niamo:

$$y = \frac{x - c}{n}, \quad y_h = c + h\frac{x - c}{n} \quad (h = 1, 2, ..., n - 1).$$

Se x è un punto di C, ρ la quantità già indicata con questa lettera pel raggio cx e pel numero n, ogni punto z per cui:

$$| z - y_{n-1} | \leqq \rho$$

apparterrà ad A. Infatti, poichè x è interno ad A_n, sarà $| x - c | < n\rho$, e il punto y_{n-1} starà sul segmento del raggio cx di lunghezza $(n - 1)\rho$ preso a partire da c, sicchè, per le definizioni stabilite, ogni punto di qualunque cerchio di raggio ρ col centro su $c\,y_{n-1}$ dovrà appartenere ad A. Ne segue che la serie dedotta rispetto al punto y_{n-1} avrà raggio di convergenza maggiore di ρ, sicchè potrà scriversi:

$$f(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!} f^{(h_1)}(y_{n-1})\,(z - y_{n-1})^{h_1}, \qquad (1)$$

donde (art. 103):

$$\frac{1}{h_1!} \left| f^{(h_1)}(y_{n-1}) \right| \leqq \frac{g}{\rho^{h_1}}.$$

Poichè x appartiene anche ad A_{n1}, si ha $| y | < \rho_1$ (dove $\rho_1 = \alpha\rho$), e quindi:

$$\frac{1}{h_1!} \left| f^{(h_1)}(y_{n-1})\, y^{h_1} \right| \leqq g\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{h_1} = g\,\alpha^{h_1}. \qquad (2)$$

Centrando ora nel punto y_{n-2}, descriviamo un cerchio di raggio ρ_1 ed uno di raggio ρ; sia z_1 un

punto qualunque del primo, e z un punto che disti da z_1 non più della quantità $\rho - \rho_1$. Il punto z starà necessariamente nel cerchio di raggio ρ; inoltre, poichè questo cerchio è tutto contenuto in A, lo sarà pure il cerchio di raggio $\rho - \rho_1$ e di centro z_1. In formole si avrà:

$$| z_1 - y_{n-2} | \leqq \rho_1, \qquad | z - z_1 | \leqq \rho - \rho_1,$$
$$| z - y_{n-2} | \leqq \rho,$$

e potrà scriversi:

$$f(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!} f^{(h_1)}(z_1)(z - z_1)^{h_1},$$

donde (art. 103):

$$\frac{1}{h_1!} \left| f^{(h_1)}(z_1) \right| \leqq \frac{g}{(\rho - \rho_1)^{h_1}},$$

e moltiplicando per $| z_1 - y_{n-2} |^{h_1} \leqq \rho_1^{h_1}$:

$$\frac{1}{h_1!} \left| f^{(h_1)}(z_1)(z_1 - y_{n-2})^{h_1} \right| \leqq g \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{h_1}. \quad (3)$$

D'altra parte:

$$f^{(h_1)}(z_1) = \sum_{h_2=0}^{\infty} \frac{1}{h_2!} f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2})(z_1 - y_{n-2})^{h_2},$$

e quindi:

$$\frac{1}{h_1!} f^{(h_1)}(z_1)(z_1 - y_{n-2})^{h_1} =$$

$$= \sum_{h_2=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!\, h_2!} f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2})(z_1 - y_{n-2})^{h_1+h_2}, \quad (4)$$

donde, tenuto conto della (3):

$$\frac{1}{h_1!\,h_2!}\left|f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2})\right| \leq g\left(\frac{\alpha\cdot}{1-\alpha}\right)^{h_1}\frac{1}{\rho_1^{h_1+h_2}}.$$

Ma $|y| < \rho_2$ perchè x sta entro A_{n2}, quindi:

$$\frac{1}{h_1!\,h_2!}\left|f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2})\,y^{(h_1+h_2)}\right| \leq$$

$$\leq g\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{h_1}\alpha^{h_1+h_2}. \qquad (5)$$

Invece di due sole variabili ausiliarie, possiamo introdurne 3, 4, ..., n; fermandoci a quest'ultimo caso, e designando le variabili con:

$$z,\ z_1,\ z_2, \ldots,\ z_{n-2},\ z_{n-1},$$

queste saranno legate dalle condizioni:

$$|z_{n-1} - c| \leq \rho_{n-1}\,^*,$$

$$|z_{n-2} - z_{n-1}| \leq \rho_{n-2} - \rho_{n-1}, \ldots,$$

$$|z_1 - z_2| \leq \rho_1 - \rho_2, \qquad |z - z_1| \leq \rho - \rho_1.$$

Ripetendo il processo di prima, si giungerebbe alla relazione finale:

$$\frac{1}{h_1!\,h_2!\ldots h_n!}\left|f^{(h_1+h_2+\ldots+h_n)}(c)\,y^{h_1+h_2+\ldots+h_n}\right|$$

---

* Osserviamo che, quando si introdussero due sole variabili z_1, z, si pose $|z_1 - y_{n-2}| \leq \rho_1$; introducendone tre, si porrà $|z_2 - y_{n-3}| \leq \rho_2$, e così via; infine, quando le variabili siano n, si deve porre $|z_{n-1} - c| \leq \rho_{n-1}$.

$$\leq g\,\alpha^{h_1}\,.\,\alpha^{h_1+h_2}\ldots\alpha^{h_1+h_2+\ldots+h_{n-2}}\times$$

$$\times\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{h_1+h_2+\ldots+h_{n-1}}\alpha^{h_1+h_2+\ldots+h_n}.$$

230. Lo sviluppo (1) dell'art. prec. vale per ogni z tale che $|z-y_{n-1}|\leq\rho$. Ora:

$$x-y_{n-1}=x-c-\frac{n-1}{n}(x-c)=$$

$$=\frac{x-c}{n}=y,$$

e $|y|\leq\rho$ perchè x sta in A_n; quindi potrà porsi nella (1) $z=x$. Si avrà allora:

$$f(x)=\sum_{h_1=0}^{\infty}\frac{1}{h_1!}f^{(h_1)}(y_{n-1})\,y^{h_1}.$$

Poniamo, essendo m_1 un numero che determineremo più oltre:

$$\sum_{h_1=m_1+1}^{\infty}\frac{1}{h_1!}f^{(h_1)}(y_{n-1})\,y^{h_1}=\varepsilon_1;$$

avremo:

$$f(x)=\sum_{h_1=0}^{m_1}\frac{1}{h_1!}f^{(h_1)}(y_{n-1})\,y^{h_1}+\varepsilon_1,$$

ed inoltre, per la (2):

$$|\varepsilon_1|\leq g\sum_{h_1=m_1+1}^{\infty}\alpha^{h_1}=g\,\frac{\alpha^{m_1+1}}{1-\alpha}.$$

Nella (4) dell'art. prec. facciamo $z_1=y_{n-1}$, il che è lecito perchè:

$$|y_{n-1}-y^{n-2}|=|y|\leq\rho.$$

avremo:

$$\frac{1}{h_1!} f^{(h_1)}(y_{n-1}) y^{h_1} = \sum_{h_2=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!\, h_2!} f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2}) y^{h_1+h_2},$$

e sommando da $h_1 = 0$ ad $h_1 = m_1$:

$$\sum_{h_1=0}^{m_1} \frac{1}{h_1!} f^{(h_1)}(y_{n-1}) y^{h_1} =$$

$$= \sum_{h_1=0}^{m_1} \sum_{h_2=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!\, h_2!} f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2}) y^{h_1+h_2}.$$

Poniamo ora, essendo m_2 un numero da determinarsi:

$$\varepsilon_2 = \sum_{h_1=0}^{m_1} \sum_{h_2=m_2+1}^{\infty} \frac{1}{h_1!\, h_2!} f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2}) y^{h_1+h_2};$$

avremo:

$$f(x) = \sum_{h_1=0}^{m_1} \sum_{h_2=0}^{m_2} \frac{1}{h_1!\, h_2!} f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2}) y^{h_1+h_2} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

inoltre per la (5) dell'art. prec.:

$$|\varepsilon_2| \leq g \sum_{h_1=0}^{m_1} \sum_{h_2=m_2+1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{h_1} \alpha^{h_1+h_2} =$$

$$= g \sum_{h_1=0}^{m_1} \sum_{h_2=m_2+1}^{\infty} \left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right)^{h_1} \alpha^{h_2} =$$

$$= g \frac{1 - \left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right)^{m_1+1}}{1 - \frac{\alpha^2}{1-\alpha}} \cdot \frac{\alpha^{m_2+1}}{1-\alpha} =$$

$$= g \frac{\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right)^{m_1}}{1-\frac{1-\alpha}{\alpha^2}} \left(1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^{m_1+1}\right) \frac{\alpha^{m_2+1}}{1-\alpha}.$$

Proseguendo nello stesso modo si troverebbe:

$$f(x) = \sum_{h_1=0}^{m_1} \sum_{h_2=0}^{m_2} \dots \sum_{h_n=0}^{m_n} \frac{1}{h_1!\, h_2! \dots h_n!}$$

$$\times f^{(h_1+\dots+h_n)}(c) \left(\frac{x-c}{n}\right)^{h_1+\dots+h_n} + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n,$$

dove:

$$|\varepsilon_\mu| \leq g \frac{\left(\frac{\alpha^\mu}{1-\alpha}\right)^{m_1}}{1-\frac{1-\alpha}{\alpha^\mu}} \frac{\left(\frac{\alpha^{\mu-1}}{1-\alpha}\right)^{m_2}}{1-\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu-1}}} \dots \frac{\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right)^{m_{\mu-1}}}{1-\frac{1-\alpha}{\alpha^2}} \times$$

$$\times \left[1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^\mu}\right)^{m_1+1}\right] \left[1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu-1}}\right)^{m_2+1}\right] \dots$$

$$\left[1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^{m_{\mu-1}+1}\right] \frac{\alpha^{m_\mu+1}}{1-\alpha}.$$

Osservando che:

$$\mu m_1 + (\mu-1) m_2 + \dots + 2 m_{\mu-1} + m_\mu + 1 =$$
$$= 1 + m_1 + (m_1 + m_2) + (m_1 + m_2 + m_3) + \dots +$$
$$\dots + (m_1 + m_2 + \dots + m_\mu),$$

questa relazione può scriversi:

$$|\varepsilon_\mu| \leq g \prod_{k=1}^{\mu-1} \frac{1 - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu+1-k}}\right)^{m_k+1}}{1 - \frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu+1-k}}} \times$$

$$\times \frac{\alpha^{m_1+1}}{1-\alpha} \frac{\alpha^{m_1+m_2}}{(1-\alpha)^{m_1}} \frac{\alpha^{m_1+m_2+m_3}}{(1-\alpha)^{m_2}} \cdots \frac{\alpha^{m_1+m_2+\ldots+m_\mu}}{(1-\alpha)^{m_{\mu-1}}}.$$

231. La quantità α fu supposta compresa fra 0 ed 1, e dipendente da n in modo che $\lim\limits_{n=\infty} \alpha^n = 1$. A tali condizioni soddisfa l'espressione:

$$\alpha = e^{-\frac{1}{n\omega(n)}},$$

dove $\omega(n)$ è una funzione di n sempre positiva e tendente ad ∞ insieme ad n. Si avrà allora:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1!} \frac{1}{n\,\omega(n)} + \frac{1}{2!} \frac{1}{(n\,\omega(n))^2} - \ldots,$$

quindi per n abbastanza grande:

$$\alpha > 1 - \frac{1}{n\,\omega(n)},$$

ossia:

$$1 - \alpha < \frac{1}{n\,\omega(n)};$$

inoltre, se λ è un numero intero e positivo non maggiore di n:

$$\alpha^{-\lambda} = e^{\frac{\lambda}{n\omega(n)}} \leq e^{\frac{1}{\omega(n)}}.$$

Ne segue, per $\mu \leq n$, $\mu > k \geq 1$:

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu+1-k}} < \frac{1}{n\,\omega(n)}\, e^{\frac{1}{\omega(n)}},$$

e quindi:

$$\prod_{k=1}^{\mu-1}\left[1-\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu+1-k}}\right] > \left[1-\frac{1}{n\,\omega(n)}\, e^{\frac{1}{\omega(n)}}\right]^{\mu-1} >$$

$$> \left[1-\frac{1}{n\,\omega(n)}\, e^{\frac{1}{\omega(n)}}\right]^{n}.$$

Quest'ultima espressione tende ad 1 quando n tende ad ∞, quindi, presa una quantità qualunque r maggiore di 1, potrà trovarsi un numero n abbastanza grande perchè sia:

$$\prod_{k=1}^{\mu-1}\left[1-\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu+1-k}}\right] > \frac{1}{r}.$$

D'altra parte:

$$\prod_{k=1}^{\mu-1}\left[1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu+1-k}}\right)^{m_k+1}\right] < 1;$$

quindi:

$$|\varepsilon_\mu| < g\, r\, \frac{\alpha^{m_1+1}}{1-\alpha}\, \frac{\alpha^{m_1+m_2}}{(1-\alpha)^{m_1}}\, \frac{\alpha^{m_1+m_2+m_3}}{(1-\alpha)^{m_2}} \cdots$$

$$\cdots \frac{\alpha^{m_1+m_2+\ldots+m_\mu}}{(1-\alpha)^{m_\mu}\;1}.$$

Poniamo:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \beta;$$

potremo scrivere:

$$|\varepsilon_\mu| < g\,r\,.\,\alpha^{m_1}\beta\,.\,\alpha^{m_2}\beta^{m_1}\,.\,\alpha^{m_1+m_3}\beta^{m_2}\,.\,\alpha^{m_1+m_2+m_4}\beta^{m_3}\ldots$$
$$\ldots\alpha^{m_1+m_2+\ldots+m_{\mu-2}+m_\mu}\beta^{m_{\mu-1}} =$$
$$= g\,r\,\alpha^{m_1}\beta\,\alpha^{m_2}\beta^{m_1}\prod_{r=3}^{\mu}\alpha^{m_1+m_2+\ldots+m_{r-2}+m_r}\beta^{m_{r-1}}.$$

È tempo finalmente di scegliere in modo opportuno i numeri m. Scriviamo per brevità:

$$n\,\omega(n) = \nu,$$

sicchè:

$$\alpha = e^{-\frac{1}{\nu}},$$

ed osserviamo che dallo sviluppo di $e^{-\frac{1}{\nu}}$ in serie risulta, per n, e quindi per ν, abbastanza grande:

$$\alpha < 1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2\,\nu^2} < 1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2\,\nu} = 1 - \frac{1}{2\,\nu},$$

$$1 - \alpha > \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2\,\nu^2} = \frac{1}{\nu}\left(1 - \frac{1}{2\,\nu}\right),$$

donde:

$$\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha} < \nu.$$

Noi prenderemo le m in modo che sia:

$$m_1 \geqq 2\,\nu\lg\nu,$$
$$m_2 \geqq m_1\,\nu\lg\nu,$$
$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{r-2} + m_r \geqq m_{r-1}\,\nu\lg\nu$$
$$(r = 3, 4, \ldots, \mu).$$

Sarà allora, rammentando che $\alpha < 1$:

$$\alpha^{m_1}\beta < \alpha^{2\nu \lg^\nu \nu} = e^{-2\lg^\nu \nu} = \frac{1}{\nu},$$

$$\alpha^{m_2}\beta^{m_1} \leq (\alpha^{\nu \lg^\nu} \beta)^{m_1} < (e^{-\lg^\nu \nu})^{m_1} = 1,$$

$$\alpha^{m_1+m_2+\ldots+m_{r-2}+m_r}\beta^{m_{r-1}} \leq (\alpha^{\nu \lg^\nu} \beta)^{m_{r-1}} = 1$$

$$(r = 3, 4, \ldots, \mu),$$

e quindi:

$$|\varepsilon_\mu| \leq \frac{g\,r}{\nu} = \frac{g\,r}{n\,\omega(n)} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n),$$

donde:

$$|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n| \leq \frac{g\,r}{\omega(n)}.$$

Poichè $\omega(n)$ cresce indefinitamente, noi potremo prendere un numero N tale che per ogni $n \geq N$ sia $\frac{g\,r}{\omega(n)} < \sigma$, essendo σ una quantità positiva presa ad arbitrio. Dopo ciò pongasi:

$$c_{nh} = \frac{1}{n^h} \Sigma \frac{1}{h_1!\,h_2!\ldots h_n!},$$

dove in luogo di $h_1, h_2, \ldots, h_n$ si devono mettere tutti i sistemi di numeri interi e non negativi che soddisfanno alle relazioni:
$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = h$, $h_1 \leq m_1$, $h_2 \leq m_2, \ldots, h_n \leq m_n$;
pongasi inoltre:

$$g_n(x) = \sum_h c_{nh} f^{(h)}(c)(x - c)^h,$$

ossia:

$$g_n(x) = \sum_h c_{nh}\, a_h (x - c)^h .$$

Potrà assegnarsi un numero N tale che per ogni $n \geqq N$ si abbia in tutto il campo C:

$$| f(x) - g_n(x) | < \sigma. \qquad (1)$$

È da notarsi che *i coefficienti* c_{nh} *e i numeri* m_r *sono affatto indipendenti dai dati del problema* (cioè dalle costanti a_h, dal punto c, e dal campo C).

Facciamo finalmente:

$$G_0(x) = g_0(x) = a_0,$$
$$G_h(x) = g_h(x) - g_{h-1}(x) \qquad (h = 1, 2, \ldots),$$

da cui:

$$\sum_{h=0}^{n} G_h(x) = g_n(x); \qquad (2)$$

potrà scriversi:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} G_h(x). \qquad (3)$$

La serie del 2° membro è equiconvergente nel campo C; infatti, se p è un numero positivo qualsiasi, si ha dalle (1), (2) per tutti i punti del campo C e per ogni $n \geqq N$:

$$\left| f(x) - \sum_{h=0}^{n} G_h(x) \right| < \sigma, \quad \left| f(x) - \sum_{h=0}^{n+p} G_h(x) \right| < \sigma,$$

da cui:

$$\left| \sum_{h=n+1}^{n+p} G_h(x) \right| < 2\sigma,$$

e quindi:

$$\left| \sum_{h=n+1}^{\infty} G_h(x) \right| \leq 2\sigma.$$

Il risultato contenuto nella (3) può enunciarsi come segue:

Se E è la stella di centro c appartenente all'elemento di funzione analitica $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} a_h (x-c)^h$, la funzione analitica $f(x)$ generata da questo elemento può rappresentarsi in tutta la stella E mediante una serie di polinomi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)$$

equiconvergente in qualunque campo interno ad E. I polinomi $G_n(x)$ hanno la forma:

$$G_n(x) = \sum_h d_{nh} a_h (x-c)^h,$$

dove i coefficienti d_{nh} sono indipendenti da c e dalle a e dipendono soltanto dai numeri n, h.

I coefficienti d_{nh}, come i c_{nh}, possono assumere forme infinitamente diverse. Tra i due sistemi di coefficienti hanno luogo le seguenti relazioni:

$$d_{nh} = c_{nh} - c_{n-1,h}.$$

La (1) può anche scriversi:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} g_n(x).$$

I numeri m_h possono in particolare prendersi così:

$$m_h = n^{2h};$$

si ha allora:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{h_1=0}^{n^2} \sum_{h_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{h_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{h_1!\,h_2!\ldots h_n!} \times$$
$$\times f^{(h_1+h_2+\ldots+h_n)}(c) \left(\frac{x-c}{n}\right)^{h_1+h_2+\ldots+h_n}. \qquad (4)$$

232. Aggiungiamo pochi cenni sul seguito delle ricerche di Mittag-Leffler, che forma l'oggetto di vari lavori da lui pubblicati durante la stampa del presente volume. *

Abbiansi ∞^n funzioni:

$$f_{h_1 h_2 \ldots h_n} \quad (h_r = 0, 1, \ldots;\ r = 1, 2, \ldots, n)$$

d'una variabile x. Se le serie:

$$\left.\begin{array}{ll}
\sum_{h_n=0}^{\infty} f_{h_1 \ldots h_n} & = f_{h_1 \ldots h_{n-1}} \\
\sum_{h_{n-1}=0}^{\infty} f_{h_1 \ldots h_{n-1}} & = f_{h_1 \ldots h_{n-2}} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\sum_{h_2=0}^{\infty} f_{h_1 h_2} & = f_{h_1} \\
\sum_{h_1=0}^{\infty} f_{h_1} & = f
\end{array}\right\} \quad (1)$$

* Questi lavori sono citati, insieme ai precedenti, nella nota all'art. 222.

sono tutte convergenti per $x = x_0$, si dice che:

$$f = \sum_{h_1=0}^{\infty} \sum_{h_2=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} f_{h_1 h_2 \dots h_n} \qquad (2)$$

è *una serie n volte infinita convergente per* $x = x_0$. Se le serie (1) sono equiconvergenti in un certo campo C, si dice che la (2) è *una serie n volte infinita equiconvergente nel campo C.*

Ciò premesso, si può alla rappresentazione di $f(x)$ mediante un'espressione (come la (4) dell'art. prec.) in cui tanto il numero delle somme da eseguirsi come il numero dei termini d'ogni singola somma è infinito, sostituirne un'altra in cui il numero delle somme è finito.

Si osservi a tal uopo, che la (1) dell'art. 229 e le formole che ne derivano valgono anche se in esse si ponga y_μ in luogo di y_{n-1}, essendo μ un numero qualunque minore di n. Ne risulta che:

$$\sum_{h_1=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!} f^{(h_1)}(y_\mu)\, y^{h_1}$$

è equiconvergente in C, donde segue (v. art. 132) che lo è pure:

$$\sum_{h_1=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!} f^{(h_1+h_2)}(y_\mu)\, y^{h_1}$$

qualunque sia h_2. Sono dunque equiconvergenti in C tutte le serie seguenti:

$$f(x) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \frac{1}{h_1!} f^{(h_1)}(y_{n-1})\, y^{h_1},$$

$$f^{(h_1)}(y_{n-1}) = \sum_{h_2=0}^{\infty} \frac{1}{h_2!} f^{(h_1+h_2)}(y_{n-2})\, y^{h_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f^{(h_1+h_2\ldots+h_n)}(y_1) = \sum_{h_n=0}^{\infty} \frac{1}{h_n!} f^{(h_1+h_2+\ldots+h_n)}(c)\, y^{h_n};$$

cioè pel valore di n determinato in principio dell'art. 229 e per tutti i valori maggiori la serie n volte infinita ed equiconvergente in C:

$$\sum_{h_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{h_n=0}^{\infty} \frac{1}{h_1! \ldots h_n!} f^{(h_1+\ldots+h_n)}(c) \left(\frac{x-c}{n}\right)^{h_1+\ldots+h_n}, \quad (3)$$

dove $f^{(r)}(c) = a_r$, rappresenta in C la funzione $f(x)$.

Se C è contenuto nel cerchio di convergenza della serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} a_h (x-c)^h, \quad (4)$$

può prendersi $n = 1$, e la (3) si riduce alla (4).

233. L'espressione (3) dell'art. prec. si comporta diversamente secondochè $n \leq 3$ oppure $n > 3$. Nel primo caso essa è equiconvergente nella stella E_n e non converge in alcun punto esterno a questa. Invece nel secondo caso non si può, in generale, trovare un campo tale che la (3) sia equiconvergente in esso e non converga in alcun punto esterno.

Però si può costruire una serie analoga alla (3) per la quale esiste un campo della natura voluta.

Preso un raggio l uscente da c, si descrivano n circonferenze $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$, di raggi $r, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, i cui centri $c, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ appartengano ad l, e che soddisfacciano alle seguenti condizioni:

La circonferenza γ passa per η_1;

La circonferenza γ_1 passa per c;

La circonferenza γ_t $(t = 2, 3, \ldots, n-1)$ passa per η_{t-1};

Le intersezioni di γ_t con γ_{t-1} $(t = 2, 3, \ldots, n-1)$ sono i punti di contatto delle tangenti condotte da c a γ_t.

Queste condizioni sono sufficienti a determinare $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, quando sia dato r.

Sia ρ il limite superiore dei valori di r pei quali l'insieme dei cerchi appartiene ad E; portando sul raggio l la lunghezza data dal valore che prende l'espressione:

$$|\eta_{n-1} - c| + r_{n-1}$$

per $r = \rho$, e ripetendo la costruzione per tutti i raggi uscenti da c, si otterrà una stella che potrà designarsi con $E_{\frac{1}{n}}$. Rispetto a questa stella avrà la proprietà voluta la serie n volte infinita:

$$\sum_{h_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{h_n=0}^{\infty} e_{h_1 \ldots h_n} f^{(h_1+\ldots+h_n)}(c)\,(x-c)^{h_1+\ldots+h_n}, \quad (1)$$

dove:

$$e_{h_1} = \frac{1}{h_1!}, \qquad e_{h_1 h_2} = \frac{1}{h_1!\,h_2!}\left(\frac{1}{2}\right)^{h_1+h_2},$$

$$e_{h_1 h_2 h_3} = \frac{1}{h_1!\,h_2!\,h_3!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{h_1+h_2+h_3},$$

$$e_{h_1 h_2 \ldots h_n} = \frac{1}{h_1!\,h_2!\ldots h_n!} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_{n-1}}{1+\operatorname{sen} \alpha_{n-1}}\right)^{h_1+h_2+\ldots+h_n} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha_{n-1}}\right)^{h_1+h_2} \left(\frac{2}{\operatorname{sen} \alpha_{n-2}}\right)^{h_3} \left(\frac{2^2}{\operatorname{sen} \alpha_{n-3}}\right)^{h_4} \ldots$$

$$\ldots \left(\frac{2^{\nu-2}}{\operatorname{sen} \alpha_{n+1-\nu}}\right)^{h_\nu} \ldots \left(\frac{2^{n-4}}{\operatorname{sen} \alpha_3}\right)^{h_{n-2}} (2^{n-2})^{h_{n-1}+h_n},$$

e l'angolo α_t, che è la metà dell'angolo delle tangenti condotte da c alla circonferenza γ_t, si calcola colle formole:

$$\operatorname{sen} \alpha_1 = 1,$$

$$\operatorname{sen} \alpha_{t+1} = -\frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 \alpha_t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \alpha_t \sqrt{8 + \operatorname{sen}^2 \alpha_t}\,.$$

234. La differenza tra l'espressione (4) dell'art. 231 e la (1) dell'art. 233 sta in ciò, che la prima ha per stella di convergenza la stella E mentre l'altra ha come tale $E_{\frac{1}{n}}$.

Al crescere indefinitamente di n, la stella $E_{\frac{1}{n}}$ tende a confondersi colla E.

Indicando con $S_n(x \mid c)$ la (1) dell'art. prec., l'espressione:

$$\lim_{n=\infty} S_n(x \mid c)$$

ha per stella di convergenza E.

Ora, invece di una serie numerabile d'espressioni e di stelle corrispondenti, si può ottenerne

una serie continua, facendo dipendere la stella variabile, anzichè dalla variabile discontinua n, da una variabile continua α.

Sia α una quantità positiva e non maggiore di 1, e, posto $\beta = 1 - \alpha$, si faccia:

$$\varphi(u \mid \alpha) = K u e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right]\frac{du}{u}},$$

dove K è una costante. Se x è un punto d'un raggio l uscente da c, e se si pone:

$$z - c = (x - c)\,\varphi(u \mid \alpha),$$

facendo descrivere alla variabile u, nel proprio piano, una circonferenza di raggio 1 intorno all'origine, z descrive una *figura cordiforme* H costituita da due archi di spirale logaritmica simmetrici rispetto al raggio l e intersecantisi in due punti di questo. Presa poi una quantità r positiva e minore di 1, e posto:

$$K = \frac{1}{r} e^{-\int_0^r \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right]\frac{du}{u}},$$

se si fa descrivere ad u un cerchio di raggio r intorno all'origine, z descriverà una figura Z simmetrica rispetto ad l, interna ad H, e che si avvicina indefinitamente a questa al tendere di r ad 1. Sia $|\bar{x} - c|$ il limite superiore dei valori di $|x - c|$ per cui Z è interna alla stella E; indicheremo con E_α la stella avente per contorno l'insieme dei punti $\bar{x}$. Z si dirà la *figura generatrice* e $\varphi(u \mid \alpha)$ la *funzione generatrice* di E_α.

La serie:

$$S_\alpha(x \mid c) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x-c),$$

dove:

$$G_n(x-c) = \frac{h^{(1)}{}_{n-1}}{1!\,n-1!} a_1(x-c) +$$

$$+ \frac{h^{(2)}{}_{n-2}}{2!\,n-2!} a_2(x-c)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{h_1{}^{(n-1)}}{n-1!\,1!} a_{n-1}(x-c)^{n-1} + \frac{h_0{}^{(n)}}{n!} a_n(x-c)^n,$$

e le:

$$h^{(r)}_{n-r} \qquad (n = 1, 2, \ldots; \quad r = 1, 2, \ldots, n)$$

sono costanti positive dipendenti soltanto dalla funzione generatrice, ha per stella di convergenza E_α e rappresenta nell'interno di questa la funzione $f(x)$; e l'espressione:

$$\lim_{\alpha=0} S_\alpha(x \mid c)$$

ha per stella di convergenza E, e rappresenta $f(x)$ in tutti i punti di questa.

Se si prende invece, come suggerisce Fredholm, * la funzione generatrice:

$$\varphi(u \mid \alpha) = \frac{\lg[1-(1-\alpha)u]}{\lg \alpha},$$

* V. Mittag-Leffler 125 *bis*.

si trova la serie:

$$S_\alpha(x \mid c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)^n}{n!} \left[k_{n-1}^{(n)} a_1 \frac{x-c}{H} + \ldots + \right.$$
$$\left. + k_1^{(n)} a_{n-1} \left(\frac{x-c}{H}\right)^{n-1} + a_n \left(\frac{x-c}{H}\right)^n \right],$$

dove $H = -\lg \alpha$, e le $k_r^{(n)}$ sono determinate dalle relazioni ricorrenti:

$$\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1) =$$
$$= \lambda^n + k_1^{(n)} \lambda^{n-1} + \ldots + k_{n-1}^{(n)} \lambda.$$

Funzioni lacunari. *

235. La possibilità *astratta* di funzioni analitiche il cui campo d'esistenza non ricopra l'intero piano risulta dalla definizione stessa di funzione analitica. Però le funzioni che più comunemente si considerano nell'analisi (funzioni razionali, trascendenti elementari, funzioni ellittiche) hanno per campo d'esistenza l'intero piano, escluso un insieme finito od infinito di punti non formanti aree nè linee. Si presenta quindi la questione, se vi sieno *effettivamente* funzioni analitiche non esistenti in certe parti lineari *(sezioni* o *linee singolari)* o superficiali *(lacune)* del piano.

---

* D'Arone 5, Cayley 38, Fredholm 55, Gillet 58, Goursat 61, 62, 63, Homén 80, Krygowski 87, 88, Lerch 102, 104, Mittag-Leffler 126, 127, Poincaré 160, 161, Stieltjes 193, Teixeira 195, 196.

Uno studio più profondo della teoria delle funzioni ellittiche ha messo in luce come il modulo d'una funzione ellittica possa considerarsi come funzione analitica del rapporto dei suoi periodi, esistente soltanto pei valori di questo rapporto in cui il coefficiente di i è positivo, ossia esistente soltanto nella parte del piano della variabile indipendente superiore all'asse reale. Da questa, con una sostituzione lineare (art. 161), si può ottenere una funzione esistente soltanto all'interno, o soltanto all'esterno, di un dato cerchio. Funzioni di tale natura furono anche costruite direttamente,* e in alcune di queste noi avremo occasione di imbatterci più innanzi. Per ora, tra i molti esempi di costruzione di funzioni lacunari, basterà esporre nei suoi dettagli quello di Poincaré, che è il primo in ordine di tempo, e che è anche uno dei più generali.

236. Il problema che si propone Poincaré è il seguente: Dato un campo C, il cui contorno sia una linea semplice convessa l, costruire una funzione analitica esistente in tutto il piano ad eccezione del campo C.

Prendasi una successione di quantità (reali o complesse) $a_1, a_2, \ldots$ tali che la serie $\sum_{h=1}^{\infty} |a_h|$ sia convergente, ed un insieme numerabile di punti

* Importantissime tra queste sono le funzioni *fuchsiane*, il cui studio è dovuto a Poincaré; esse, sotto certe condizioni, esistono soltanto nell'interno del cerchio di raggio 1 col centro nell'origine.

$c_1, c_2, \ldots$, appartenente a C (il contorno incluso) e denso in ogni parte di l; e si formi l'espressione aritmetica:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{x - c_h}.$$

Sia x_0 un punto esterno a C, ρ il raggio del cerchio γ di centro x_0 tangente esternamente ad l; essendo l convesso, questo cerchio è unico, ed è tutto esterno a C, fatta eccezione pel punto di contatto x_1. Si ha quindi, per tutti i valori di h:

$$| c_h - x_0 | \geqq \rho,$$

e però, se x è un punto interno al cerchio γ:

$$| x - x_0 | < \rho \leqq | c_h - x_0 |,$$

quindi:

$$\frac{1}{x - c_h} = \frac{1}{(x - x_0) - (c_h - x_0)} =$$

$$= -\frac{1}{(c_h - x_0)\left(1 - \dfrac{x - x_0}{c_h - x_0}\right)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{(c_h - x_0)^{k+1}},$$

e:

$$F(x) = -\sum_{h=1}^{\infty} \left[a_h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{(c_h - x_0)^{k+1}} \right] =$$

$$= -\sum_{h=1}^{\infty} P_h(x - x_0),$$

dove:

$$P_h(x - x_0) = a_h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{(c_h - x_0)^{k+1}}. \qquad (1)$$

La serie $\sum_{h=1}^{\infty} P_h(x - x_0)$ è equiconvergente per tutti i valori di x per cui $|x - x_0| = \rho'$, essendo ρ' una quantità qualunque minore di ρ. Si ha infatti:

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{(c_h - x_0)^{k+1}} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x - x_0|^k}{|c_h - x_0|^{k+1}} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho'^k}{\rho^{k+1}} = \frac{1}{\rho - \rho'},$$

quindi:

$$\left| \sum_{h=m}^{\infty} P_h(x - x_0) \right| = \left| \sum_{h=m}^{\infty} a_h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{(c_h - x_0)^{k+1}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\rho - \rho'} \sum_{h=m}^{\infty} |a_h|;$$

ma, presa σ ad arbitrio, può sempre trovarsi un numero m tale che sia:

$$\sum_{h=m}^{\infty} |a_h| < \sigma(\rho - \rho'),$$

quindi per tutti i valori x considerati si ha:

$$\left| \sum_{h=m}^{\infty} P_h(x - x_0) \right| < \sigma.$$

Si potrà dunque applicare alla serie (1) il lemma di Weierstrass, e si avrà per tutti i punti x interni a γ:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k, \qquad (2)$$

dove:

$$b_k = -\sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{(c_h - x_0)^{k+1}}.$$

Pertanto $F(x)$ rappresenta una funzione analitica regolare in ogni punto esterno a C.

Resta da dimostrarsi che questa funzione non può continuarsi oltre la linea l, ossia che, qualunque sia il punto x_0 esterno a C, il cerchio di convergenza dell'elemento di funzione analitica corrispondente a quel punto è precisamente il cerchio γ tangente esternamente ad l. A tal uopo basta far vedere che la serie (2) non è assolutamente convergente per:

$$| x - x_0 | = \rho.$$

Supponiamo dapprima che il punto di contatto x_1 di γ con l sia uno dei punti c, p. es. c_r. Presa ε ad arbitrio, e determinato un numero m tale, che per ogni $n > m$ sia:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} | a_h | < \varepsilon,$$

fissiamo un numero n maggiore di m e di r. Sia inoltre δ la minima tra le distanze dei punti:

$$c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}, c_{r+1}, \ldots, c_n$$

dal punto x_0; sarà $\delta > \rho$, e quindi potrà prendersi una quantità ρ_1 tale che sia:

$$\delta > \rho_1 > \rho.$$

Si avrà allora:

$$\left| \sum_{h=1}^{r-1} \frac{a_h}{(c_h - x_0)^{k+1}} + \sum_{h=r+1}^{n} \frac{a_h}{(c_h - x_0)^{k+1}} \right| <$$

$$< \frac{1}{\rho_1^{k+1}} \left\{ | a_1 | + | a_2 | + \ldots + | a_{r-1} | + \right.$$

$$\left. + | a_{r+1} | + \ldots + | a_n | \right\} < \frac{S}{\rho_1^{k+1}},$$

dove:

$$S = \sum_{h=1}^{n} | a_h |.$$

D'altra parte, essendo $| c_h - x_0 | > \rho$ per ogni h diverso da r:

$$\left| \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{a_h}{(c_h - x_0)^{k+1}} \right| < \frac{1}{\rho^{k+1}} \sum_{h=n+1}^{\infty} | a_h | < \frac{\varepsilon}{\rho^{k+1}};$$

quindi:

$$\left| b_k + \frac{a_r}{(c_r - x_0)^{k+1}} \right| < \frac{S}{\rho_1^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{\rho^{k+1}},$$

e:

$$\rho^k \left| b_k + \frac{a_r}{(c_r - x_0)^{k+1}} \right| < \frac{S}{\rho} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{k+1} + \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

Facendo tendere k ad ∞, $\left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{k+1}$ tende a zero, quindi si ha:

$$\lim_{k=\infty} \rho^k \left| b_k + \frac{a_r}{(c_r - x_0)^{k+1}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\rho};$$

ma ε è arbitraria, quindi dev'essere:

$$\lim_{k=\infty} \rho^k \left| b_k + \frac{a_r}{(c_r - x_0)^{k+1}} \right| = 0,$$

ossia, tenuto conto che $| c_r - x_0 | = \rho$:

$$\lim_{k=\infty} | b_k | \rho^k = \lim_{k=\infty} \rho^k \left| \frac{a_r}{(c_r - x_0)^{k+1}} \right| = \frac{a_r}{\rho} = | = 0.$$

Di qui segue che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} | b_k | \rho^k$ non può essere convergente.

Supponiamo ora che x_1 non sia uno dei punti c; ed ammettiamo, se è possibile, che il raggio di convergenza della serie (2) non sia ρ, ma $\rho_1 > \rho$. Si conduca allora un raggio $x_0 x_2$ del cerchio ρ_1, e su $x_1 x_2$ come base si descriva un triangolo isoscele avente il vertice, che diremo x_3, su $x_0 x_2$. È evidente che si può prendere l'angolo $x_1 x_0 x_2$ abbastanza piccolo perchè, detto x_4 il punto d'incontro di $x_0 x_2$ con l, la normale ad l in un punto qualunque x_5 dell'arco $x_1 x_4$ incontri $x_0 x_2$ in un punto x_6 del tratto $x_0 x_3$. * Si ha allora $x_6 x_2 > x_6 x_1$, e quindi, a maggior ragione, $x_6 x_2 > x_6 x_5$. Ora, poichè l'insieme dei punti c è denso in ogni parte di l, possiamo supporre che x_5 sia uno di tali punti. Per ciò che si è stabilito poc'anzi, il raggio di convergenza dell'elemento di funzione ana-

* Basterebbe per esempio fare in modo che x_3 cadesse entro il campo C.

litica corrispondente al punto x_6 (posto sulla normale ad l in un punto c) è precisamente $x_6 x_5$, sicchè il relativo cerchio di convergenza è tutto

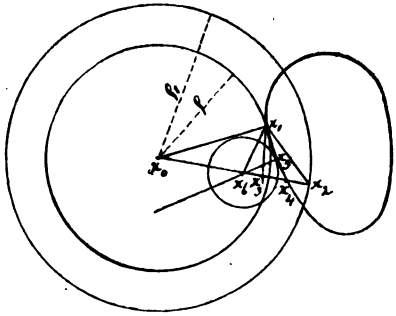


Fig. 5.

interno a quello corrispondente al punto x_0; ma ciò è impossibile (art. 120), quindi l'ipotesi fatta è assurda.

Resta adunque dimostrato che il campo C è una lacuna per la funzione analitica rappresentata dall'espressione aritmetica $F(x)$.

237. Poincaré ha trattato, come esempio di applicazione del suo metodo, il caso in cui il campo C è un poligono convesso ad un numero qualunque di lati. Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sono p punti, e C è un poligono convesso aventi per vertici alcuni dei punti α, e di cui gli altri punti α stanno sul perimetro o nell'interno, l'espressione aritmetica:

$$F(x) = \Sigma \frac{a_1^{h_1} a_2^{h_2} \ldots a_p^{h_p}}{x - \dfrac{h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2 + \ldots + h_p \alpha_p}{h_1 + h_2 + \ldots + h_p}},$$

dove le $h_1, h_2, \ldots, h_p$ prendono tutti i valori interi non negativi, esclusa la combinazione $0, 0, \ldots, 0$, ed $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sono p quantità costanti di modulo minore di 1, rappresenta una funzione analitica regolare in tutti i punti esterni a C e solo in questi punti.

In particolare per $p = 2$ si ottiene così una funzione avente una sezione (il segmento $\alpha_1 \alpha_2$).

Vogliasi, p. es., costruire una funzione avente per sezione la parte negativa dell'asse reale. Partendo dall'espressione generale:

$$F(x) = \Sigma \frac{a_1^{h_1} a_2^{h_2}}{x - \frac{h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2}{h_1 + h_2}},$$

si applichi la sostituzione lineare:

$$y = \frac{x - \alpha_1}{x - \alpha_2},$$

ossia:

$$x = \frac{\alpha_2 y - \alpha_1}{y - 1},$$

che fa corrispondere ai valori α_1, α_2 di x rispettivamente i valori 0 e ∞ di y e ai valori di x compresi fra α_1 e α_2 valori negativi di y. Si avrà:

$$F(x) = \Phi(y) = \Sigma \frac{a_1^{h_1} a_2^{h_2}}{\frac{\alpha_2 y - \alpha_1}{y - 1} - \frac{h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2}{h_1 + h_2}} =$$

$$= \frac{y - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} \Sigma \frac{a_1^{h_1} a_2^{h_2}}{h_1 y + h_2};$$

e invece di questa funzione potrà considerarsi l'altra:

$$\Psi(y) = \Sigma \frac{a_1^{h_1} a_2^{h_2}}{h_1 y + h_2}.$$

Una forma speciale si ottiene ponendo:

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{e};$$

si ha così la funzione:

$$\Omega(y) = \Sigma \frac{e^{-h_1 - h_2}}{h_1 y + h_2}.$$

238. Le considerazioni esposte valgono ancora, come è facile vedere, se l non è convesso, purchè non abbia angoli rientranti.

Segue da ciò che, se si ha un arco di curva, lo si può considerare come formante, contato due volte, il contorno di una lacuna d'area nulla; e pertanto, applicando il metodo di Poincaré, si può costruire una funzione avente per sezione quell'arco di curva.

239. Se è dato nel piano un numero finito di campi separati $C_1, C_2, \ldots, C_p$ racchiusi da contorni convessi, si potranno costruire le funzioni analitiche $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)$, tali che $f_h(x)$ esista soltanto all'esterno di C_h. Allora la funzione analitica $\sum_{h=1}^{p} f_h(x)$ sarà regolare nell'intero piano esclusi i campi $C_1, C_2, \ldots, C_p$.

240. Lerch ha stabilito alcuni teoremi assai generali, che conducono alla costruzione di funzioni lacunari. Citiamo il seguente:

Sieno m_0, m_1, m_2, ... *numeri interi positivi, di cui ciascuno sia divisore del successivo,* $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... *serie di potenze convergenti entro il cerchio unità* * *ed aventi sulla periferia di esso tutt'al più il punto singolare* $x = 1$; *inoltre la serie:*

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} P_h(x^{m_h})$$

sia tale da potersi convertire in una serie di potenze convergente entro il cerchio unità, e soddisfaccia per infiniti numeri n alla relazione:

$$\lim_{x=1} \sum_{h=n}^{\infty} P_h(x^{m_h}) = \infty.$$

Allora $f(x)$ *è una funzione analitica esistente soltanto entro il cerchio unità.*

Come casi speciali di questo teorema si trovano le funzioni $\sum_{h=0}^{\infty} x^{2^h}$ e $\sum_{h=0}^{\infty} x^{h!}$.

Sul concetto di continuazione analitica. **

241. Se una funzione analitica è regolare in un campo C, e se tutti i punti del contorno l sono punti singolari per essa, la funzione non può *continuarsi* al di là della linea chiusa l. — D'altra

* Così si suol chiamare per brevità il cerchio di raggio 1 col centro nell'origine.

** Borel 16, 18, 20, 22, 30, 31, Fabry 48, 50, Goursat 60, Krygowski 89, Picard 142.

parte, se si ha un'espressione aritmetica convergente in due campi A, B separati, per esempio, da una linea chiusa l, e se $f_1(x)$, $f_2(x)$ sono le funzioni analitiche che essa rappresenta rispettivamente nei due campi, si sarebbe tentati a considerare l'una delle due funzioni come la *continuazione analitica* dell'altra attraverso la linea l; senonchè si è veduto che, prendendo le $f_1(x)$, $f_2(x)$ in modo del tutto arbitrario, si può sempre trovare un'espressione aritmetica che le rappresenti rispettivamente in A e in B, sicchè non sembra ragionevole chiamare continuazione analitica l'una dell'altra queste due funzioni, tra le quali non vi ha alcun vincolo. Tuttavia si può domandarsi, se, sottoponendo le espressioni aritmetiche a qualche condizione poco restrittiva, ne risultino relazioni necessarie tra le funzioni analitiche da esse rappresentate in campi separati, per modo che queste possano con qualche ragione considerarsi come continuazioni analitiche le une delle altre. Ecco come Borel ha trattato tale questione.

242. Supposti i sommandi d'un'espressione aritmetica decomposti in frazioni semplici, e supposto che con ciò non si alteri la convergenza della serie, la forma generale d'un'espressione aritmetica sarà:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{(x - c_h)^{m_h}}, \tag{1}$$

dove le c_h possono non essere tutte differenti.

Noi sottoporremo la $F(x)$ alle seguenti condizioni:

Che i numeri interi e positivi m_h ammettano un massimo finito m;

Che la serie $\sum_{h=1}^{\infty} |a_h|$ sia convergente;

Che l'insieme I dei punti c_h stia sopra una linea chiusa l e sia denso su tutta questa linea. *

Sia A la parte del piano interna alla linea l, B quella esterna ad essa. Sia A' un campo qualunque interno ad A, δ il limite inferiore delle distanze dei punti di A' da l (cfr. art. 228), e prendiamo una quantità positiva ε minore di 1 e minore di δ. Avremo allora per tutti i punti x del campo A' e per ogni valore di h:

$$|x - c_h| > \varepsilon,$$

quindi:

$$|x - c_h|^{m_h} > \varepsilon^{m_h},$$

ed essendo $m_h \leq m$, $\varepsilon < 1$:

$$|x - c_h|^{m_h} > \varepsilon^{m}.$$

Ne segue, per tutti i punti x di A' e per qualunque valore di p:

$$\left| \sum_{h=p+1}^{\infty} \frac{a_h}{(x - c_h)^{m_h}} \right| < \frac{1}{\varepsilon^m} \sum_{h=p+1}^{\infty} |a_h|;$$

ma, presa σ ad arbitrio, può sempre scegliersi n

---

* Può anche supporsi che esistano punti c_h non giacenti sopra l, purchè i punti limiti dell'insieme di questi punti non giacciano su l e non formino aree nè linee. Ciò porterebbe soltanto una lieve alterazione negli sviluppi che seguono.

in modo che sia:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} |a_h| < \sigma \varepsilon^m,$$

quindi si ha, per tutti i punti x del campo A':

$$\left| \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{a_h}{(x - c_h)^{m_h}} \right| < \sigma,$$

e la serie (1) è equiconvergente in ogni campo A' interno ad A.

Nello stesso modo si dimostrerebbe che essa è equiconvergente in ogni campo B' interno a B.

Sia ora d un punto di l che non coincida con alcuno dei punti c, e descriviamo nel campo A un cerchio, di raggio $\rho < 1$, tangente ad l in d e non contenente nel suo interno nè sul contorno alcun altro punto di l; * sia x_0 il centro di questo cerchio. Scelto il numero n come prima, e detta η una quantità positiva minore di 1 e minore della minima distanza dei punti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dalla retta $x_0 d$, si avrà:

$$\left| \sum_{h=1}^{n} \frac{a_h}{(x_0 - c_h)^{m_h}} \right| < \frac{S}{\eta^m},$$

dove:

$$S = \sum_{h=1}^{n} |a_h|;$$

* Ciò è possibile quando l non abbia angoli rientranti.

inoltre:

$$\left| \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{a_h}{(x_0 - c_h)^{m_h}} \right| < \frac{\sigma\, \varepsilon^m}{\rho^m};$$

quindi:

$$| F(x_0) | = \left| \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{(x_0 - c_h)^{m_h}} \right| < \frac{S}{\eta^m} + \frac{\sigma\, \varepsilon^m}{\rho^m},$$

e:

$$\rho^m \, | F(x_0) | < \rho^m \frac{S}{\eta^m} + \sigma\, \varepsilon^m.$$

Ne segue, per l'arbitrarietà di σ:

$$\lim_{\rho=0} \rho^m F(x_0) = 0,$$

ossia, con scrittura più espressiva:

$$\lim_{x_0=d} (x_0 - d)^m F(x_0) = 0.$$

Se d è uno dei punti c, per esempio c_r, si dimostra col ragionamento testè esposto che:

$$\lim_{x_0=c_r} (x_0 - c_r)^m \left| F(x_0) - \frac{a_r}{(x_0 - c_r)^{m_r}} \right| = 0,$$

ossia:

$$\lim_{x_0=c_r} (x_0 - c_r)^m F(x_0) = a_r \lim_{x_0=c_r} (x_0 - c_r)^{m-m_r};$$

quindi, se $m_r < m$, il limite è zero, se $m_r = m$, esso è a_r.

Ora v'ha certamente almeno un valore r per cui $m_r = m$; quindi possiamo asserire che v'ha

sulla linea l almeno un punto d tale, che, facendo tendere x ad esso lungo la normale condotta nel campo A, il prodotto $(x-d)^m F(x)$ *non* tende a zero. Il limite di questo prodotto è a_r, se d coincide col punto c_r.

Anche questi ragionamenti valgono ugualmente quando, invece del campo A, si consideri il campo B; e i limiti, per uno stesso punto di l, sono i medesimi.

243. Di qui possono trarsi le seguenti conclusioni:

Il prodotto $(x-d)^m F(x)$ tende allo stesso limite quando x tende ad un punto d di l seguendo tanto la normale interna ad A che quella interna a B; e questo limite non può essere nullo per tutti i punti di l.

Se $\lim\limits_{x=d} (x-d)^m F(x) = 0$ *per tutti i punti d di l, l'espressione $F(x)$ ha valore nullo (cioè rappresenta la funzione analitica costante* ZERO*) tanto in tutto A che in tutto B.*

Se si ha un'espressione $F(x)$, la quale sia nulla in tutti i punti del campo A, essa lo è pure in tutti i punti del campo B, e viceversa; giacchè, se $F(x)$ è nulla in A, il limite considerato è nullo per tutti i punti di l, e quindi $F(x)$ è nulla in B.

Se due espressioni aritmetiche $F_1(x)$, $F_2(x)$ della forma considerata rappresentano una medesima funzione analitica in A, esse rappresentano pure una medesima funzione analitica in B.

Se $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$ sono n espressioni aritmetiche della forma considerata, le quali rap-

presentano rispettivamente in A e in B le funzioni analitiche:

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x); \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x),$$

e se tra le f sussiste per tutti i punti di A una relazione della forma:

$$\Phi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) = 0,$$

dove Φ è simbolo di funzione razionale intera, tra le φ esiste per tutti i punti di B la relazione:

$$\Phi(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) = 0.$$

Infatti l'espressione aritmetica:

$$\Phi(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)),$$

che è della stessa natura delle F, rappresenta in A la funzione analitica $\Phi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ e in B la $\Phi(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$; se dunque una di queste è identicamente nulla, lo è anche l'altra.

Le cose dette mostrano che, quando l'espressione aritmetica che si considera si assoggetta a certe restrizioni, le funzioni analitiche che essa rappresenta nei due campi separati A, B non sono più totalmente indipendenti l'una dall'altra, ma al contrario v'ha tra esse qualche relazione; ed anzi che, se non le funzioni stesse, i loro prodotti per la distanza dal contorno tendono allo stesso limite sia che il punto mobile si avvicini al contorno stando in A, come stando in B. V'ha quindi una specie di *continuità* attraverso la linea l, e le due funzioni possono dirsi, in senso lato, la *continuazione analitica* l'una dell'altra.

244. Poincaré ha osservato, che non si può parlare di continuazione analitica attraverso una linea chiusa, a meno che non voglia considerarsi qualunque funzione come continuazione analitica di qualunque altra. Data una funzione analitica $f_1(x)$ regolare soltanto nell'interno d'una certa linea chiusa l, e presa ad arbitrio una funzione analitica $f_2(x)$ regolare soltanto all'esterno di essa, egli divide la linea l in due parti l_1, l_2, e costruisce due espressioni $F_1(x)$, $F_2(x)$ convergenti in tutto il piano tranne rispettivamente i punti di l_1 e di l_2. L'espressione $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ converge in tutto il piano tranne i punti di l; e Poincaré mostra come possano scegliersi $F_1(x)$, $F_2(x)$ in modo che $F(x)$ rappresenti rispettivamente $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ all'interno ed all'esterno di l.

In sostanza il risultato ottenuto da Poincaré non è altro che quello già stabilito da Weierstrass (v. art. 156 e segg.). Esso però non infirma punto le asserzioni di Borel, il quale vuole soltanto mostrare come, sottoponendo l'espressione aritmetica a condizioni poco restrittive, si possa far sì che le funzioni analitiche da essa rappresentate in campi separati non sieno più tra loro indipendenti e possano quindi considerarsi come continuazioni analitiche le une delle altre. — Interessantissima però è la risposta di Borel all'osservazione di Poincaré, perchè mette in chiaro come il concetto di funzione uniforme abbia d'uopo d'essere ancora approfondito. Ecco in che cosa essa consiste.

245. Se $e^y = x$, si suol scrivere, come è noto:

$$y = \lg x.$$

Posto $x = r\,e^{i\varphi}$, si ha:

$$y = \lg r + i\,\varphi;$$

quindi, poichè ad uno stesso valore di x corrispondono infiniti valori di φ (tutti tra loro congruenti rispetto a 2π), la y è una funzione ad infiniti valori. Se p. es. il punto x descrive, in senso positivo, una curva chiusa contenente l'origine, y non riprende il suo valore primitivo, ma aumenta di $2\pi i$.

Invece, se x descrive una curva chiusa non contenente l'origine, e se, per semplicità, si suppone

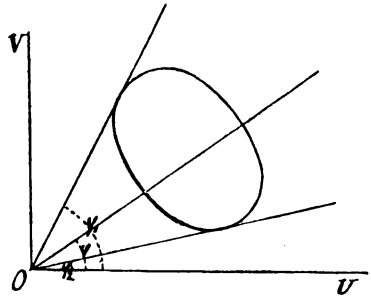


Fig 6.

che dall'origine possano condursi ad essa due sole tangenti, l'argomento φ cresce sino ad un certo valore massimo φ_1, poi decresce sino ad un certo valore minimo φ_2, e infine crescendo di nuovo riprende il valore primitivo; e lo stesso, per conse-

guenza, ha luogo per la parte imaginaria di y. Se pertanto noi vogliamo dare alla funzione $\lg x$ l'*apparenza* d'una funzione uniforme, dobbiamo impedire al punto mobile x di percorrere curve chiuse intorno all'origine, introducendo una *sezione artificiale* costituita da una linea qualsiasi che, senza incontrare sè stessa, vada dall'origine al punto all'infinito. La diciamo sezione artificiale, perchè essa non è affatto una linea di punti singolari della funzione, ma bensì una linea che noi *non vogliamo* considerare come appartenente al campo d'esistenza di essa.

Indichiamo costantemente con φ il *minimo argomento positivo* del punto x, e stabiliamo di assumere come valore della funzione y nei punti del piano superiori all'asse reale quello appunto in cui φ è il minimo argomento positivo di x, ciò che è espresso dalla notazione:

$$y = \lg r + i\varphi \qquad (0 < \varphi < \pi).$$

Prendiamo dapprima come sezione la parte negativa dell'asse reale. Allora, se, partendo da un punto x superiore all'asse reale, descriviamo un arco di cerchio, col centro nell'origine, che tagli la parte positiva dell'asse stesso, detto $x_1 = r e^{i\varphi_1}$ un punto di quest'arco posto sotto l'asse reale, il valore della funzione y in x_1 sarà:

$$\lg r + i\overline{\varphi_1},$$

dove $\overline{\varphi_1}$ è l'*argomento negativo numericamente minimo* di x_1, cioè:

$$\lg r + i(\varphi_1 - 2\pi).$$

Quindi, stabilita nel modo anzidetto la sezione, la funzione $\lg x$ resta definita in modo unico come segue:

La sua parte reale è il logaritmo aritmetico del modulo di x;

Il coefficiente di i è il minimo argomento positivo di x pei punti superiori all'asse reale, il minimo argomento positivo diminuito di 2π pei punti inferiori a quest'asse, zero pei punti della parte positiva dell'asse reale.

Noi designeremo questa funzione con $\theta_1(x)$.

Prendiamo ora invece come sezione la parte positiva dell'asse reale, e definiamo la funzione al di sopra dell'asse stesso come prima. Allora, partendo da un punto x superiore all'asse reale, e descrivendo un arco di cerchio intorno all'origine che tagli la parte negativa di tale asse, nel punto $x_1 = r e^{i\varphi_1}$ di quell'arco posto sotto l'asse reale il valore della funzione sarà:

$$\lg r + i\varphi_1.$$

Quindi, nel caso attuale, la funzione è definita come segue:

La parte reale è la stessa di prima;

Il coefficiente di i è il minimo argomento positivo di x per tutti i punti del piano non appartenenti alla sezione.

Noi designeremo la funzione così definita con $\theta_2(x)$.

246. Premesso questo, sia $g(x)$ una funzione intera, e sieno $f_1(x)$, $f_2(x)$ due funzioni analitiche uniformi aventi per sezione rispettivamente la

parte negativa e la parte positiva dell'asse reale. *
La funzione:

$$\varphi_1(x) = f_1(x) + g(x) \lg(x),$$

o, più esattamente:

$$\varphi_1(x) = f_1(x) + g(x)\, \theta_1(x),$$

è uniforme, perchè alla linea che *volevamo* considerare come una sezione per la funzione $\theta_1(x)$ si è sovrapposta una vera sezione, o — come può dirsi — una *sezione naturale*, della $f_1(x)$. In altre parole, l'intervento della funzione $f_1(x)$, che non è regolare nei punti dell'asse reale negativo, impedisce al punto mobile di attraversare questa linea, e con ciò rende impossibile il manifestarsi della polidromia della funzione $\lg x$. Così può avvenire che la somma d'una funzione uniforme e d'una non uniforme sia una funzione uniforme.

Le stesse considerazioni possono applicarsi alla funzione:

$$\varphi_2(x) = f_2(x) - g(x)\, \theta_2(x),$$

avente per sezione la parte positiva dell'asse reale.

La somma:

$$F(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) =$$
$$= f_1(x) + f_2(x) + g(x)\,[\theta_1(x) - \theta_2(x)]$$

avrà per sezione l'intero asse reale, e rappresenterà quindi al di sopra e al di sotto di esso due

* Abbiamo costruito una di tali funzioni nell'art. 237.

funzioni analitiche diverse. Infatti si ha:

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ al di sopra dell'asse reale,} \\ -2\pi i \text{ al di sotto dell'asse reale;} \end{cases}$$

quindi $F(x)$ rappresenta la funzione:

$$f_1(x) + f_2(x)$$

al di sopra dell'asse reale, la funzione:

$$f_1(x) + f_2(x) - 2\pi i\, g(x)$$

al di sotto. Di più tra le due funzioni non esiste alcun legame, giacchè $g(x)$ può essere scelta in modo affatto arbitrario.

Pertanto il risultato su cui si basa Poincaré è dovuto alla circostanza, che le funzioni a cui egli ricorre sono bensì uniformi, ma lo sono divenute per la sovrapposizione d'una sezione naturale di un loro sommando ad una sezione artificiale d'un altro non uniforme.

247. Il fatto paradossale, che la somma d'una funzione uniforme e d'una non uniforme può essere una funzione uniforme, mostra che la definizione ordinaria di *uniformità* dev'essere modificata.

Borel propose la seguente definizione:

Sia $F(x)$ un'espressione aritmetica, e sia I l'insieme dei poli dei suoi termini. La funzione analitica $f(x)$ rappresentata da $F(x)$ in un certo campo connesso C si dirà *uniforme*, se, presi due punti qualunque del campo non appartenenti nè ad I nè ad I', si potrà congiungerli con una linea non passante per alcun punto di I, su cui la serie $F(x)$ sia assolutamente ed uniformemente convergente.

L'espressione aritmetica $F(x)$ abbia ancora la forma:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{(x - c_h)^{m_h}}, \tag{1}$$

e non solo $\sum_{h=1}^{\infty} |a_h|$ sia convergente, ma sia inoltre possibile trovare una successione di quantità positive $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ tali, che $\sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h$ e $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{|a_h|}{\varepsilon_h^{m_h}}$ siano convergenti. * Scegliamo poi un numero n tale che sia:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \varepsilon_h < \frac{\sigma}{2}, \qquad \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{|a_h|}{\varepsilon_h^{m_h}} < \sigma, \tag{2}$$

σ essendo una quantità positiva arbitraria.

Prendiamo due punti qualunque p, q non appartenenti all'insieme I dei punti c_h nè al suo derivato I'; noi potremo descrivere intorno ad essi due cerchi γ, δ di raggio ρ abbastanza piccolo perchè non contengano alcun punto di I nè di I'. I cerchi passanti pei punti p, q hanno tutti il centro sulla retta l che biseca ortogonalmente la pq, e noi indicheremo con e_h il centro del cerchio passante pei punti p, q, c_h. Sulla retta l prendiamo un intorno simmetrico η_h, di lunghezza

---

* P. es., se $\sum_{h=1}^{\infty} |a_h|^{\frac{1}{m_h+1}}$ è convergente, basta porre $\varepsilon_h = |a_h|^{\frac{1}{m_h+1}}$.

$2.\varepsilon_h$, di ciascun punto e_h per cui $h > n$; la somma di tutti questi intorni, che è $2 \sum_{h=n+1}^{\infty} \varepsilon_h$, sarà, per la prima delle (2), $< \sigma$. Se quindi sulla retta l prendiamo un segmento st di lunghezza $> \sigma$, esso non potrà essere ricoperto completamente da segmenti η_h. Per fissare le idee, supporremo s e

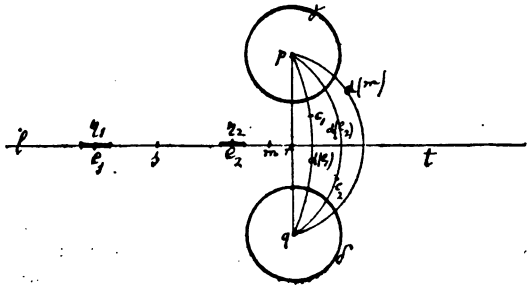


Fig. 7.

t equidistanti dal punto d'intersezione r della l colla pq. Prendiamo dunque su l un punto m esterno a tutti i segmenti η_h $(h > n)$, e non coincidente con alcuno dei punti $e_1, e_2, \ldots, e_n$; l'arco di cerchio $\alpha(m)$ di centro m passante per p e q non conterrà alcuno dei punti c_h; le distanze dei suoi punti dai punti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ammetteranno un minimo positivo θ. Di più, se con $\alpha_1(m)$ si indica la parte dell'arco pq di centro m esterna ai cerchi γ, δ, e analogamente con $\alpha(e_h)$ e con $\alpha_1(e_h)$ l'arco pq di centro e_h e la parte di esso esterna ai cerchi γ, δ, infine con d la distanza di un punto qualunque di $\alpha(m)$ da un punto qualun-

que di $\alpha_1(e_h)$, si avrà:

$$d \geqq \tau \,.\, m\, e_h\,,\ ^*$$

---

* Per giustificare quest'asserzione di Borel occorre una dimostrazione alquanto lunga, che mettiamo in nota per non interrompere il filo dell'esposizione nel testo.

Sia u un punto del tratto $s\,r$; noi vogliamo anzitutto trovare un limite inferiore per la minima distanza di $\alpha(u)$ da $\alpha_1(s)$. Indichiamo rispettivamente con i, v i punti di incontro di $\alpha(s)$, $\alpha(u)$ con $r\,t$, con j, w i loro punti d'incontro colla circonferenza γ. Poichè l'arco $i\,j$ ha lunghezza minore dell'arco $v\,w$, ed inoltre appartiene ad un cerchio di raggio maggiore, sarà $\wedge\, i\,p\,j < \wedge\, v\,p\,w$, e quindi:

$$\wedge\, i\,p\,v < \wedge\, j\,p\,w.$$

Ora:

$$j\,w = 2\,\rho \operatorname{sen} \frac{1}{2}\, j\,p\,w > \rho \operatorname{sen} j\,p\,w,$$

quindi a maggior ragione:

$$j\,w > \rho \operatorname{sen} i\,p\,v.$$

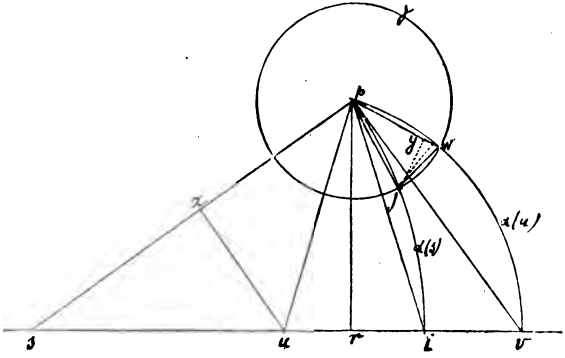


Fig. 8.

Ma si ha:

$$\operatorname{sen} i\,p\,v = \operatorname{sen} r\,p\,v \cos r\,p\,i - \cos r\,p\,v \operatorname{sen} r\,p\,i =$$

$$= \frac{r\,p\,(r\,v - r\,i)}{p\,v\,.\,p\,i} = \frac{r\,p\,.\,i\,v}{p\,v\,.\,p\,i},$$

dove τ è una costante positiva che dipende dalla posizione dei punti p, q, s, t, e dal raggio ρ dei cerchi γ, δ, e che possiamo anche supporre minore di 1. — Se dunque x è un punto dell'arco $\alpha_1(m)$, si avrà, ricordando che c_h sta su $\alpha_1(e_h)$:

per $h \leqq n$, $\quad |x - c_h| \geqq \theta$;

per $h > n$, $\quad |x - c_h| \geqq \tau \,.\, m\, e_h > \tau\, \varepsilon_h$.

---

e poichè $p\,v \leqq r\,p\sqrt{2} < 2\,r\,p$:

$$\operatorname{sen} i\,p\,v > \frac{i\,v}{2\,p\,i}.$$

Ora:

$$i\,v = s\,u + u\,v - s\,i = s\,u - (s\,p - u\,p);$$

se da u si conduce $u\,z$ perpendicolare ad $s\,p$, si ha $z\,p < u\,p$, quindi:

$$s\,z > s\,p - u\,p,$$

e inoltre dal confronto dei triangoli $s\,z\,u$, $s\,r\,p$ si ha:

$$\frac{s\,z}{s\,u} = \frac{s\,r}{s\,p},$$

quindi:

$$i\,v > s\,u - s\,z = s\,u\left(1 - \frac{s\,r}{s\,p}\right) = s\,u\,\frac{r\,i}{s\,p},$$

e:

$$\operatorname{sen} i\,p\,v > \frac{r\,i}{2\,s\,p\,.\,p\,i}\,s\,u,$$

donde finalmente:

$$j\,w > \frac{\rho\,.\,r\,i}{2\,s\,p\,.\,p\,i}\,s\,u.$$

La minima distanza ξ di $\alpha(u)$ da $\alpha_1(s)$ passa certamente per j e si trova tra $j\,w$ ed $j\,p$; essa è evidentemente maggiore della distanza $j\,y$ di j dalla retta $p\,w$. Ora:

$$j\,y = j\,w \cos y\,j\,w = j\,w \cos \frac{1}{2}\,j\,p\,w,$$

Ne segue:

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{|a_h|}{|x - c_h|^{m_h}} \leqq \sum_{h=1}^{n} \frac{|a_h|}{\theta^{m_h}},$$

che è una quantità finita e determinata; inoltre,

---

inoltre:

$$\wedge jpw + \wedge rpj < \frac{\pi}{2},$$

quindi:

$$jy > jw \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ rpj\right) =$$

$$= jw \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ rpj\right) > jw \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ rpi\right),$$

e infine:

$$\xi > jy > \frac{\rho \cdot ri \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ rpi\right)}{2\, sp \cdot pi}\, su.$$

Poniamo:

$$\tau = \frac{\rho \cdot ri \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ rpi\right)}{2\, sp \cdot pi};$$

sarà:

$$\xi > \tau \cdot su.$$

La quantità τ dipende soltanto dalla posizione dei punti p, q, dalla lunghezza del segmento st (supposto simmetrico rispetto ad r) e dal raggio dei cerchi γ, δ; *essa è indipendente dalla posizione del punto u.*

Se ora si prendono sul segmento st due punti s', u' tali che il segmento $s'u'$ sia eguale al segmento su e diretto nello stesso senso, è evidente che la minima distanza di $\alpha(u')$ da $\alpha_1(s')$ sarà maggiore di quella di $\alpha(u)$ da $\alpha_1(s)$; essa quindi sarà maggiore di $\tau \cdot s'u'$, come si voleva dimostrare.

tenuto conto della seconda delle (2):

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{|a_h|}{|x - c_h|^{m_h}} \leq \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{|a_h|}{\tau^{m_h} \varepsilon_h^{m_h}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\tau^m} \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{|a_h|}{\varepsilon_h^{m_h}} < \frac{\sigma}{\tau^m}.$$

Dunque la (1) è assolutamente ed uniformemente convergente su tutto l'arco $\alpha_1(m)$. Può dirsi pertanto in generale, che la serie (1) è assolutamente ed uniformemente convergente su ogni arco pq non passante per alcuno dei punti c_h.

Supponiamo che i punti c_h sieno densi su tutta una linea chiusa l; la $F(x)$ rappresenterà rispettivamente le funzioni analitiche $f_1(x), f_2(x)$ nello spazio interno A e nello spazio esterno B ad l. Nel senso della nuova definizione però le $f_1(x)$, $f_2(x)$ non formeranno che *una sola funzione uniforme*, giacchè, presi due punti qualunque rispettivamente in A, B, si potranno trovare infiniti archi di cerchio che li congiungano senza passare per alcun punto c_h, e su ciascuno di questi archi $F(x)$ sarà assolutamente ed uniformemente convergente.

248. Mostriamo ora come, colla nuova definizione, non possa avvenire che la somma d'una funzione uniforme e d'una funzione non uniforme sia una funzione uniforme.

Riprendiamo la funzione già considerata:

$$\varphi_1(x) = f_1(x) + g(x) \lg x$$

avente per sezione la parte negativa dell'asse

reale. Se p, q sono due punti, l'uno superiore, l'altro inferiore all'asse reale, può accadere che sopra certi archi di cerchio pq attraversanti l'asse reale negativo $f_1(x)$ sia continua; ciò avviene se $f_1(x)$ è rappresentata da un'espressione aritmetica della forma da noi considerata, perchè allora, i punti c_h formando un insieme numerabile, esistono infiniti archi pq che tagliano l'asse reale negativo in punti diversi da quei punti. Però, qualunque sia l'arco di cerchio che si considera, purchè attraversante l'asse reale negativo, la funzione $\lg x$, o più precisamente $\theta_1(x)$, su di esso non è continua; giacchè, se con ε si indica una quantità positiva piccola a piacere, in un punto $x = r\,e^{i(\pi-\varepsilon)}$ si ha:

$$\theta_1(x) = \lg r + i(\pi - \varepsilon),$$

in un punto $x = r\,e^{i(\pi+\varepsilon)}$ si ha:

$$\theta_1(x) = \lg r + i(-\pi + \varepsilon),$$

sicchè nel passaggio attraverso l'asse reale negativo ha luogo una discontinuità di -2π. Pertanto, se si ha un'espressione aritmetica $F(x)$ che rappresenti la $\theta_1(x)$, essa non potrà essere convergente assolutamente ed uniformemente sopra alcun arco pq che attraversi l'asse reale negativo. La stessa cosa potrà dirsi d'una funzione analitica che rappresenti $\varphi_1(x)$, sicchè $\varphi_1(x)$, nel senso della nuova definizione, non sarà una funzione uniforme.

249. Fabry ha esposto dei concetti affatto simili a quelli di Borel. — Se d è un punto d'una linea singolare l d'una funzione $f(x)$, può avve-

nire che, tendendo x a d lungo una linea non tangente ad l, $f(x)$ e tutte le sue derivate tendano a limiti determinati e finiti; in tal caso d può dirsi un *punto singolare non assoluto*, in questo senso, che, se:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{(x - c_h)^{m_h}}$$

è un'espressione aritmetica rappresentante la funzione analitica $f(x)$, d non è uno dei punti c_h, ma soltanto un punto limite dell'insieme di questi punti. Dopo ciò, sia l una linea chiusa la quale divida il piano in due campi A, B, e sieno $f_1(x)$, $f_2(x)$ due funzioni analitiche esistenti rispettivamente in questi due campi. Se, quando x va, nel modo anzidetto, ad un punto d di l, che non appartenga ad un certo insieme numerabile di punti, le due funzioni e le loro derivate tendono agli stessi limiti, le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$ possono considerarsi *come un'unica funzione.*

250. Picard, pur adottando il concetto della continuazione analitica attraverso una sezione chiusa, vuol effettuarla con un metodo differente, cioè uscendo dal piano della variabile complessa.

Sia $f(x)$ una funzione analitica esistente in un campo C racchiuso da una linea l. Se si pone $x = u + i\,v$, si ha:

$$f(x) = \mu(u, v) + i\,\nu(u, v),$$

dove $\mu(u, v)$, $\nu(u, v)$ sono funzioni reali delle due variabili reali u, v. Tentiamo ora di costruire una funzione reale di 3 variabili reali, $\varphi(u, v, w)$, la quale sia finita e continua per $w = |= 0$, qualunque

sieno u e v, e per $w = 0$ e per le coppie di valori u, v corrispondenti ai punti x del campo C si riduca a $\mu(u, v)$. Se per $w = 0$ e per tutte le coppie di valori u, v corrispondenti ai punti d'un campo D separato da C dalla linea l la $\varphi(u, v, w)$ ha valore finito, l'insieme di questi valori costituirà una funzione $\mu_1(u, v)$ che potrà considerarsi come la continuazione analitica di $\mu(u, v)$ oltre la linea l. Siccome poi (art. 127), data la parte reale d'una funzione analitica, la sua parte imaginaria è determinata a meno d'una costante additiva, così si potrà determinare nel campo D una funzione $\nu_1(u, v)$ tale che $\mu_1(u, v) + i\,\nu_1(u, v)$ sia una funzione analitica $f_1(x)$; la costante arbitraria potrà fissarsi colla condizione che se, tendendo x ad un punto d di l nel campo C, $f(x)$ tende ad un limite determinato, allo stesso limite debba tendere $f_1(x)$ quando x si avvicina indefinitamente a d nel campo D.

Sia, p. es., $c_1, c_2, \ldots$ un insieme numerabile di punti denso sopra una linea chiusa l, $f(x)$ la funzione analitica rappresentata nello spazio C interno a questa linea dall'espressione aritmetica:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{x - c_h},$$

dove le a_h sono numeri reali. Posto $c_h = \alpha_h + i\,\beta_h$, si avrà entro C:

$$f(x) = F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{(u - \alpha_h) + i(v - \beta_h)} =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h\,[(u - \alpha_h) - i(v - \beta_h)]}{(u - \alpha_h)^2 + (v - \beta_h)^2},$$

non è minore nè di ρ' nè di ρ'', e quindi è maggiore di ρ, il che prova che $f(x)$ e $\omega(x)$ sono egualmente singolari.

252. *Se:*

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h, \quad \varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$$

sono due serie di potenze egualmente singolari, e se, al crescere indefinitamente di h, il rapporto $\frac{a_{h+1}}{a_h}$ tende ad un limite finito e diverso da zero, allo stesso limite tende $\frac{b_{h+1}}{b_h}$.

Posto:

$$\lim_{h=\infty} \frac{a_{h+1}}{a_h} = \frac{1}{c}, \qquad b_h = l_h a_h, \tag{1}$$

$|c| = \rho$ sarà (art. 90) il raggio di convergenza di $f(x)$, e quindi di $\varphi(x)$, mentre la serie:

$$\psi(x) = f(x) - k\varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (1 - k l_h) a_h x^h,$$

dove k è una costante opportunamente scelta, avrà raggio di convergenza $\rho' > \rho$, e però sarà assolutamente convergente, p. es., per un valore di x preso in modo che sia $\rho < \xi < \rho'$, ξ designando come sempre il modulo di x. Poichè pertanto la serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} |1 - k l_h| \, |a_h| \, \xi^h$$

è convergente, sarà:

$$\lim_{h=\infty} (1 - k\, l_h)\, a_h \xi^h = 0;$$

presa quindi una quantità positiva arbitraria ε, potrà determinarsi un numero m tale che per ogni $h > m$ sia:

$$| 1 - k\, l_h |\, \alpha_h \xi^h < \varepsilon, \tag{2}$$

α_h denotando il modulo di a_h. D'altra parte, poichè dalla prima delle (1) segue:

$$\lim_{h=\infty} \frac{\alpha_{h+1}}{\alpha_h} = \frac{1}{\rho},$$

presa una quantità σ tale che sia $\rho < \sigma < \xi$, potrà trovarsi un numero n tale che per ogni $h \geqq n$ sia:

$$\frac{\alpha_{h+1}}{\alpha_h} > \frac{1}{\sigma}.$$

Ne segue, per $h > n$:

$$\frac{\alpha_h}{\alpha_n} > \frac{1}{\sigma^{h-n}},$$

e quindi:

$$\alpha_h \xi^h > \alpha_n \sigma^n \left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^h.$$

Combinando questa relazione colla (2), si ha per ogni h maggiore di m e di n:

$$| 1 - k\, l_h | < \frac{\varepsilon}{\alpha_n \sigma^n} \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^h; \tag{3}$$

ma $\lim\limits_{h=\infty} \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^h = 0$, quindi:

$$\lim_{h=\infty} (1 - k\, l_h) = 0,$$

ossia:

$$\lim_{h=\infty} l_h = \frac{1}{k}.$$

Questa relazione può scriversi anche:

$$\lim_{h=\infty} l_{h+1} = \frac{1}{k};$$

ne segue:

$$\lim_{h=\infty} \frac{l_{h+1}}{l_h} = 1,$$

ossia, ricordando il valore di l_h:

$$\lim_{h=\infty} \frac{b_{h+1}}{b_h} = \lim_{h=\infty} \frac{a_{h+1}}{a_h} = \frac{1}{c}.$$

253. Dalla (3) dell'art. prec. segue:

$$\left| \frac{1}{k} - l_h \right| < \frac{\eta\, \tau^h}{2\, |\, k\, |},$$

dove si è posto:

$$\frac{\varepsilon}{\alpha_n\, \sigma^n} = \frac{\eta}{2}, \qquad \frac{\sigma}{\xi} = \tau < 1;$$

scrivendo la stessa relazione per un altro indice $i > h$, si ha:

$$\left| \frac{1}{k} - l_i \right| < \frac{\eta\, \tau^i}{2\, |\, k\, |} < \frac{\eta\, \tau^h}{2\, |\, k\, |},$$

e quindi, sottraendo le due relazioni:

$$| l_h - l_i | < \frac{\eta \tau^h}{| k |},$$

dove i è un indice qualunque maggiore di h.

254. *Sia:*

$$c_0, c_1, c_2, \ldots$$

una successione di quantità avente un limite c finito e diverso da zero, e sia $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ *una serie di potenze avente raggio di convergenza* $\rho' > \rho$, *dove* $\rho = | c |$. *La serie semplice* $P(x)$ *in cui può convertirsi la serie doppia:*

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h \left[\frac{x^h}{c_h} + \frac{x^{h+1}}{c_h\, c_{h+1}} + \ldots \right]^*$$

ha raggio di convergenza ρ, *tranne il caso in cui sussista la relazione:*

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h c_0\, c_1 \ldots c_{h-1} = 0, \qquad (1)$$

nel qual caso il suo raggio di convergenza è almeno eguale a ρ'.**

---

* Si suppone che le c_h sieno tali da rendere soddisfatte le condizioni per la trasformabilità della serie doppia in serie semplice.

** Pincherle dimostra questo ed altri teoremi coll'aiuto del suo *calcolo funzionale distributivo*; noi abbiamo ridotte le dimostrazioni a forma elementare, per renderne possibile la lettura anche a chi non conosce i principi di questa feconda ed interessante teoria.

Si ha:

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left[x^r \sum_{h=0}^{r} \frac{a_h}{c_h\, c_{h+1} \ldots c_r} \right] =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{x^r}{c_0\, c_1 \ldots c_r} \sum_{h=0}^{r} a_h\, c_0\, c_1 \ldots c_{h-1} \right],$$

ossia:

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{b_r\, x^r}{c_0\, c_1 \ldots c_r}, \qquad (2)$$

dove:

$$b_r = \sum_{h=0}^{r} a_h\, c_0\, c_1 \ldots c_{h-1}.$$

Prendasi una quantità θ tale che sia $\rho < \theta < \rho'$; si potrà trovare un numero n avente la proprietà che, per ogni $h \geqq n$, $|c_h| < \theta$. Si avrà allora:

$$\sum_{h=n}^{\infty} a_h\, c_0\, c_1 \ldots c_{h-1} =$$

$$= c_0\, c_1 \ldots c_{n-1} \sum_{h=n}^{\infty} a_h\, c_n\, c_{n+1} \ldots c_{h-1},$$

$$\left| \sum_{h=n}^{\infty} a_h\, c_n\, c_{n+1} \ldots c_{h-1} \right| < \frac{1}{\theta^n} \sum_{h=n}^{\infty} \alpha_h\, \theta^h,$$

la quale ultima serie è convergente perchè:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h\, x^h$$

ha raggio di convergenza maggiore di θ. Ne segue che la serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h\, c_0\, c_1 \ldots c_{h-1}$$

è assolutamente convergente, ossia che b_r, al crescere indefinitamente di r, tende ad un limite determinato e finito. Poniamo:

$$\lim_{r=\infty} b_r = \sum_{h=0}^{\infty} a_h c_0 c_1 \ldots c_{h-1} = p.$$

Presa una quantità $\zeta > |p|$, potrà trovarsi un numero m tale che per ogni $r \geqq m$ sia $|b_r| < \zeta$. D'altra parte, se σ è una quantità positiva minore di ρ, potrà trovarsi un numero n tale che per ogni $r \geqq n$ sia $|c_r| > \sigma$. Si avrà allora, indicando con s un numero non minore di m nè di n:

$$\sum_{r=s}^{\infty} \frac{b_r x^r}{c_0 c_1 \ldots c_r} = \frac{1}{c_0 c_1 \ldots c_s} \sum_{r=s}^{\infty} \frac{b_r x^r}{c_{s+1} c_{s+2} \ldots c_r},$$

$$\left| \sum_{r=s}^{\infty} \frac{b_r x^r}{c_{s+1} c_{s+2} \ldots c_r} \right| < \zeta \sigma^s \sum_{r=s}^{\infty} \left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^r.$$

Ma la serie del secondo membro di quest'ultima relazione è convergente per ogni $\xi < \sigma$, e σ è una quantità soggetta alla sola condizione di essere minore di ρ, quindi la serie (2) è convergente per ogni $|x| < \rho$, e però il suo raggio di convergenza non può essere minore di ρ.

Dobbiamo ancora dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinchè il suo raggio di convergenza sia maggiore di ρ è che sia soddisfatta la (1), o, ciò che è lo stesso, che sia $p = 0$.

Supponiamo che la (2) sia convergente per:

$$|x| = \xi > \rho.$$

Trovato un numero n tale che per ogni $h \geqq n$ sia $|c_h| < \xi$, si avrà:

$$\sum_{r=n}^{\infty} |b_r| \frac{\xi^r}{|c_0 c_1 \ldots c_r|} =$$

$$= \frac{\xi^n}{|c_0 c_1 \ldots c_n|} \sum_{r=n}^{\infty} |b_r| \frac{\xi^{r-n}}{|c_{n+1} \ldots c_r|} >$$

$$> \frac{\xi^n}{|c_0 c_1 \ldots c_n|} \sum_{r=n}^{\infty} |b_r| ;$$

ma la serie del primo membro è convergente, quindi lo sarà anche $\sum_{r=n}^{\infty} |b_r|$, dónde segue:

$$\lim_{r=\infty} b_r = 0,$$

ossia $p = 0$.

Reciprocamente sia $p = 0$; potrà scriversi:

$$\sum_{h=0}^{r} a_h c_0 c_1 \ldots c_{h-1} + \sum_{h=r+1}^{\infty} a_h c_0 c_1 \ldots c_{h-1} = 0,$$

ossia:

$$b_r = - \sum_{h=r+1}^{\infty} a_h c_0 c_1 \ldots c_{h-1},$$

quindi:

$$P(x) = - \sum_{r=0}^{\infty} \left[x^r \sum_{h=r+1}^{\infty} a_h c_{r+1} c_{r+2} \ldots c_{h-1} \right] =$$

$$= - \sum_{r=0}^{\infty} d_r x^r ,$$

dove:

$$d_r = \sum_{h=r+1}^{\infty} a_h c_{r+1} c_{r+2} \ldots c_{h-1}.$$

Presa una quantità θ tale che sia $\rho < \theta < \rho'$, può trovarsi un numero n avente la proprietà che per ogni $h \geqq n$ sia $|c_h| < \theta$. D'altra parte, poichè $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ ha raggio di convergenza $\rho' > \rho$, presa una quantità λ tale che $\theta < \lambda < \rho'$, e detto M il massimo modulo della serie considerata sulla circonferenza di raggio λ col centro nell'origine, sarà (art. 103):

$$\alpha_h \leqq \frac{M}{\lambda^h}.$$

Ne segue, per ogni $r \geqq n-1$:

$$|d_r| < M \sum_{h=r+1}^{\infty} \frac{\theta^{h-r-1}}{\lambda^h} = \frac{M}{\theta^{r+1}} \sum_{h=r+1}^{\infty} \left(\frac{\theta}{\lambda}\right)^h =$$

$$= \frac{M}{\lambda^r (\lambda - \theta)},$$

quindi:

$$\left| \sum_{r=n-1}^{\infty} d_r x^r \right| < \frac{M}{\lambda - \theta} \sum_{r=n-1}^{\infty} \left(\frac{\xi}{\lambda}\right)^r,$$

la quale ultima serie è convergente per ogni $\xi < \lambda$. Ma λ è soggetto alla sola condizione di essere minore di ρ', quindi può concludersi che il raggio di convergenza della $P(x)$ è almeno ρ'.

255. *Siano* $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ *e* $\sum_{h=0}^{\infty} a_h^{(1)} x^h$ *due serie di potenze i cui raggi di convergenza siano maggiori d'una certa quantità* ρ, *e si deducano da esse rispettivamente* (col processo del precedente articolo) *le serie:*

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{x^r}{c_0\, c_1 \ldots c_r} \sum_{h=0}^{r} a_h\, c_0\, c_1 \ldots c_{h-1} \right],$$

$$P^{(1)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{x^r}{c_0\, c_1 \ldots c_r} \sum_{h=0}^{r} a_h^{(1)}\, c_0\, c_1 \ldots c_{h-1} \right],$$

aventi ambedue raggio di convergenza ρ; *queste due serie sono egualmente singolari.*

Perchè il raggio di convergenza di $P(x)$ e di $P^{(1)}(x)$ sia ρ, deve essere:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h\, c_0\, c_1 \ldots c_{h-1} \neq 0, \quad \sum_{h=0}^{\infty} a_h^{(1)}\, c_0\, c_1 \ldots c_{h-1} \neq 0.$$

Dopo ciò, se facciamo:

$$k = \frac{\sum_{h=0}^{\infty} a_h\, c_0\, c_1 \ldots c_{h-1}}{\sum_{h=0}^{\infty} a_h^{(1)}\, c_0\, c_1 \ldots c_{h-1}}, \tag{1}$$

e se dalla serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \left(a_h - k\, a_h^{(1)} \right) x^h = \sum_{h=0}^{\infty} a_h^{(2)} x^h$$

deduciamo, col metodo dell'art. prec., la serie:

$$P^{(2)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{x^r}{c_0\, c_1 \ldots c_r} \sum_{h=0}^{r} a_h^{(2)}\, c_0\, c_1 \ldots c_{h-1} \right] =$$
$$= P(x) - k\, P^{(1)}(x),$$

avremo, in virtù della (1):

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h^{(2)} c_0 c_1 \ldots c_{h-1} = 0.$$

Ne segue che $P^{(2)}(x)$ ha raggio di convergenza maggiore di ρ, e quindi che le serie $P(x)$, $P^{(1)}(x)$ sono egualmente singolari.

256. *Data una serie:*

$$\omega(x) = \sum_{h=0}^{\infty} q_h x^h$$

avente raggio di convergenza ρ, *e tale che:*

$$\lim_{h=\infty} \frac{q_{h+1}}{q_h} = \frac{1}{c},$$

dove $|c| = \rho$, *qualunque serie egualmente singolare di* $\omega(x)$ *può ottenersi mediante l'applicazione del processo dell'art. 254 ad una serie avente raggio di convergenza maggiore di* ρ.

Noi supporremo data una serie $Q(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x_h$ egualmente singolare di $\omega(x)$, e dimostreremo che esiste una serie $\sum_{h=0}^{\infty} g_h x^h$, avente raggio di convergenza $> \rho$, dalla quale si può dedurre col processo accennato la serie $Q(x)$.

Se poniamo:

$$a_h = l_h q_h, \qquad (1)$$

avremo (art. 252, 253):

$$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{h=\infty} \dfrac{l_{h+1}}{l_h} = 1 \\ |\, l_h - l_i \,| < \dfrac{\eta\, \tau^h}{|\, k \,|} \qquad \text{per} \qquad i > h \end{array}\right\}. \tag{2}$$

Scegliamo le c_h come segue:

$$\frac{1}{q_0} = c_0, \quad \frac{q_0}{q_1} = c_1, \quad \frac{q_1}{q_2} = c_2, \ldots, \quad \frac{q_{h-1}}{q_h} = c_h, \ldots, \tag{3}$$

da cui:

$$q_h = \frac{1}{c_0\, c_1\, c_2 \ldots c_h}; \tag{4}$$

poniamo inoltre:

$$\left.\begin{array}{l} l_0 = g_0 \\ l_1 = g_0 + g_1\, c_0 \\ l_2 = g_0 + g_1\, c_0 + g_2\, c_0\, c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_h = g_0 + g_1 c_0 + g_2 c_0\, c_1 + \ldots + g_h\, c_0\, c_1 \ldots c_{h-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}, \tag{5}$$

da cui:

$$g_h = \frac{l_h - l_{h-1}}{c_0\, c_1 \ldots c_{h-1}}.$$

Sarà per la seconda delle (2) e per la (4):

$$|\, g_h \,| < \frac{\eta}{|\, k \,|} \frac{\tau^{h-1}}{|\, c_0\, c_1 \ldots c_{h-1} \,|} = \frac{\eta}{|\, k \,|} \,|\, q_{h-1} \,|\, \tau^{h-1},$$

quindi:

$$\sum_{h=1}^{\infty} |g_h| \xi^h < \frac{\eta \xi}{|k|} \sum_{h=0}^{\infty} |q_h| \tau^h \xi^h .$$

Poichè $\tau < 1$, potremo prendere ξ in modo che sia $\rho < \xi < \frac{\rho}{\tau}$; allora $\tau \xi < \rho$, e la serie del secondo membro è convergente, quindi lo è anche quella del primo membro. Adunque $\sum_{h=0}^{\infty} g_h x^h$ è assolutamente convergente per un certo valore di x di modulo maggiore di ρ; e però il suo raggio di convergenza è maggiore di ρ.

Se alla serie $\sum_{h=0}^{\infty} g_h x^h$ applichiamo il processo dell'art. 254 dando alle c_h i valori (3), otterremo la serie:

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{x^r}{c_0 c_1 \ldots c_r} \sum_{h=0}^{r} g_h c_0 c_1 \ldots c_{h-1} \right],$$

che per le (4), (5), (1) può scriversi anche:

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} q_r l_r x^r = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = Q(x).$$

257. Hadamard stabilì pel primo il seguente teorema, che fu poi dimostrato per altre vie anche da Borel e da Pincherle: *

---

* Hadamard e Borel si servono degl'integrali curvilinei, Pincherle ricorre al calcolo funzionale. Noi riproduciamo, in sostanza, la dimostrazione di quest'ultimo, fondandola però esclusivamente sulle nozioni esposte nella presente opera.

Se si indicano genericamente con u, v i punti singolari delle funzioni analitiche $f(x)$, $\varphi(x)$ generate dalle serie di potenze:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h, \qquad Q(x) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h,$$

la funzione analitica $\psi(x)$ generata dalla serie:

$$R(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h b_h x^h$$

non può avere altri punti singolari che i punti u v.

In virtù dell'identità:

$$a_h = \sum_{i=0}^{h} \left[\binom{h}{i} \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} a_{i-r} \right], \; *$$

---

* Ecco come si dimostra quest'identità. Poniamo:

$$\theta = \sum_{i=0}^{h} \left[\binom{h}{i} \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} a_{i-r} \right];$$

mettendo $i-s$ in luogo di r, e ricordando che:

$$\binom{i}{r} = \binom{i}{i-r},$$

avremo:

$$\theta = \sum_{i=0}^{h} \left[\binom{h}{i} \sum_{s=0}^{i} (-1)^{i-s} \binom{i}{s} a_s \right] =$$

$$= \sum_{s=0}^{h} \left[a_s \sum_{i=s}^{h} (-1)^{i-s} \binom{h}{i} \binom{i}{s} \right].$$

Ora:

$$\binom{h}{i}\binom{i}{s} = \frac{h!}{i!\,h-i!} \frac{i!}{s!\,i-s!} =$$

$$= \frac{h!}{s!\,h-s!} \cdot \frac{h-s!}{h-i!\,i-s!} = \binom{h}{s}\binom{h-s}{i-s},$$

può scriversi:

$$R(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{h} \sum_{r=0}^{i} \binom{h}{i} (-1)^r \binom{i}{r} a_{i-r} b_h x^h =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} \lambda_i \, b_h x^h = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\lambda_i \sum_{h=i}^{\infty} \binom{h}{i} b_h x^h \right],$$

dove:

$$\lambda_i = \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} a_{i-r}.$$

Ora:

$$Q^{(i)}(x) = i! \sum_{h=i}^{\infty} \binom{h}{i} b_h x^{h-i},$$

quindi:

$$R(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \lambda_i \, x^i \, Q^{(i)}(x).$$

---

quindi:

$$\theta = \sum_{s=0}^{h} \left[\binom{h}{s} a_s \sum_{i=s}^{h} (-1)^{i-s} \binom{h-s}{i-s} \right],$$

e ponendo j in luogo di $i-s$:

$$\theta = \sum_{s=0}^{h} \left[\binom{h}{s} a_s \sum_{j=0}^{h-s} (-1)^j \binom{h-s}{j} \right].$$

Ma:

$$\sum_{j=0}^{h-s} (-1)^j \binom{h-s}{j} = \begin{cases} 1 \text{ per } s = h, \\ (1-1)^{h-s} = 0 \text{ per } s < h, \end{cases}$$

quindi $\theta = a_h$.

Supponiamo di rifare gli stessi calcoli partendo dalle serie:

$$P_1(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h t^h x^h, \qquad Q(x) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h,$$

$$R_1(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h b_h t^h x^h,$$

dove t è una quantità qualunque; posto:

$$\mu_i(t) = \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} a_{i-r} t^{i-r}, \tag{1}$$

troveremo:

$$R_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \mu_i(t) x^i Q^{(i)}(x). \tag{2}$$

Ora evidentemente:

$$R_1\left(\frac{x}{t}\right) = R(x),$$

quindi dalla (2) può dedursi una nuova espressione di $R(x)$ ponendo in essa $\frac{x}{t}$ in luogo di x:

$$R(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \mu_i(t) \frac{x^i}{t^i} Q^{(i)}\left(\frac{x}{t}\right). \tag{3}$$

Se, in particolare, tutte le b_h hanno valore 1 allora si ha:

$$Q(x) = \sum_{h=0}^{\infty} x^h = \frac{1}{1-x}, \; R(x) = P(x), \tag{4}$$

inoltre:

$$Q^{(i)}(x) = \frac{i\,!}{(1-x)^{i+1}},$$

e quindi:

$$Q^{(i)}\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{i\,!}{\left(1-\frac{x}{t}\right)^{i+1}} = \frac{i\,!\,t^{i+1}}{(t-x)^{i+1}};$$

sostituendo nella (3) e tenendo conto della seconda delle (4), avremo:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i\,!}\mu_i(t)\frac{x^i}{t^i}\frac{i\,!\,t^{i+1}}{(t-x)^{i+1}} =$$
$$= \frac{t}{t-x}\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i(t)\left(\frac{x}{t-x}\right)^i.$$

Facciamo:

$$\frac{x}{t-x} = y; \tag{5}$$

l'ultima espressione potrà scriversi:

$$P(x) = (1+y)\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i(t)\,y^i = (1+y)\,S(y).$$

Sia σ il raggio di convergenza della serie di potenze $S(y)$. Alla circonferenza di raggio σ, col centro nell'origine, del piano y corrisponde nel piano x la circonferenza γ (art. 161) determinata dalla relazione:

$$\left|\frac{x}{t-x}\right| = \sigma,$$

cioè la circonferenza luogo dei punti le cui distanze dall'origine e dal punto t hanno il rapporto costante σ; di più, siccome per la (5) ad $y=0$ corrisponde $x=0$, all'interno del cerchio σ del piano y corrisponde nel piano x quella delle due regioni in cui γ divide il piano che contiene l'origine. Designando con C questa regione, potrà dirsi dunque che l'espressione aritmetica:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu_i(t) \left(\frac{x}{t-x}\right)^i,$$

od anche l'altra:

$$\frac{t}{t-x} \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i(t) \left(\frac{x}{t-x}\right)^i, \tag{6}$$

è convergente in tutto il campo C; e potrà anche aggiungersi, applicando alla $S(y)$ il teorema dell'art. 88, che l'espressione (6) è equiconvergente in ogni campo interno a C. E poichè essa rappresenta la serie $P(x)$ nel cerchio di convergenza di questa, essa rappresenterà la funzione analitica $f(x)$ generata da $P(x)$ in tutto il campo C. Sulla circonferenza γ la $f(x)$ avrà almeno un punto singolare $\bar{u}$, e sarà:

$$\left| \frac{\bar{u}}{t-\bar{u}} \right| = \sigma.$$

D'altra parte, se x è un punto interno al cerchio di convergenza di $Q(x)$, si ha pei punti x' d'un certo intorno di x:

$$Q(x') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} Q^{(i)}(x)(x'-x)^i,$$

e ponendo $\frac{x}{t}$, $\frac{x'}{t}$ in luogo di x, x':

$$Q\left(\frac{x'}{t}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i\,!} Q^{(i)}\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t^i} (x' - x)^i .$$

Il cerchio di convergenza di questa serie passerà per un punto singolare della funzione $\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$; ora, se $x = \bar{v}$ è un punto singolare della $\varphi(x)$, $x = \bar{v}\,t$ è un punto singolare della $\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$, sicchè il raggio di convergenza della serie considerata sarà:

$$\tau = \left| x - \bar{v}\,t \right|.$$

Diciamo M il valor massimo del modulo di $S(y)$ sopra la circonferenza $|y| = \sigma' < \sigma$, N quello del modulo di $Q\left(\frac{x'}{t}\right)$ sulla circonferenza:

$$|x' - x| = \tau' < \tau;$$

avremo (art. 103):

$$|\mu_i(t)| \leq \frac{M}{\sigma'^i}, \qquad \frac{1}{i\,!}\left| Q^{(i)}\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t^i} \right| \leq \frac{N}{\tau'^i},$$

quindi:

$$\frac{1}{i\,!}\left| \mu_i(t)\, Q^{(i)}\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t^i} \right| \leq \frac{M\,N}{\sigma'^i\,\tau'^i} .$$

Se ne deduce senza difficoltà che la serie (3) è convergente assolutamente per $|x| < \sigma'\,\tau'$, e quindi

per $|x| < \sigma\tau$, ossia per:

$$|x| < \left| \frac{\bar{u}}{t - \bar{u}} \right| \; |x - \bar{v}\, t| \,,$$

la quale diseguaglianza può scriversi anche:

$$\left| \frac{x}{x - \bar{v}\, t} \right| < \left| \frac{\bar{u}\, \bar{v}}{\bar{u}\, \bar{v} - \bar{v}\, t} \right| .$$

Sotto questa forma essa ci si dice che, se consideriamo la circonferenza δ passante pel punto $\bar{u}\, \bar{v}$ e rispetto a cui i punti 0, $\bar{v}\, t$ sono coniugati, e se diciamo D quella delle due regioni in cui essa divide il piano che contiene l'origine, l'espressione (3) è convergente per tutti i punti x che trovansi nella regione D. Sulla circonferenza δ giacerà quindi in generale qualche punto singolare. Se facciamo variare t con continuità, varierà con continuità anche la circonferenza δ, mentre lo stesso non potrà avvenire in generale di $\bar{u}$ e di $\bar{v}$, sicchè, variando δ entro certi limiti, il punto $\bar{u}\, \bar{v}$ sarà sempre il medesimo. Ne segue che il punto $\bar{u}\, \bar{v}$, comune ad infinite circonferenze δ, è un punto singolare.

258. Se alla $f(x)$ si aggiunge una funzione $f_1(x)$ regolare nel punto $\bar{u}$ e rappresentata nell'intorno dell'origine dalla serie $\sum_{h=0}^{\infty} a_{1h}\, x^h$, la serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} (a_h + a_{1h})\, b_h\, x^h$$

genererà una funzione analitica $\omega(x)$ tale che:

$$\psi_1(x) = \omega(x) - \psi(x)$$

sarà in generale regolare nei punti $\bar{u}$ $\bar{v}$. — Infatti, $\bar{v}$ essendo punto singolare di $\varphi(x)$ e $\bar{u}$ non essendolo di $f_1(x)$, la $\psi_1(x)$, che dipende da $f_1(x)$, $\varphi(x)$ come $\psi(x)$ dipende da $f(x)$, $\varphi(x)$, non avrà alcuna singolarità in $\bar{u}\,\bar{v}$.

Farebbe eccezione il caso in cui esistessero due punti $\bar{u}$, $\bar{\bar{u}}$ ed altri due $\bar{v}$, $\bar{\bar{v}}$ tali che fosse $\bar{u}\ \bar{v} = \bar{\bar{u}}\ \bar{\bar{v}}$; allora, se $f_1(x)$ è singolare in $\bar{\bar{u}}$, $\psi_1(x)$ può esserlo in $\bar{\bar{u}}\ \bar{\bar{v}}$ ossia in $\bar{u}\ \bar{v}$.

Il risultato ottenuto può esprimersi dicendo che *la natura della singolarità* $\bar{u}\ \bar{v}$ *è in generale determinata da quella delle singolarità* $\bar{u}$, $\bar{v}$.

259. Per esempio, se $f(x)$ ha in $\bar{u}$ un polo d'ordine m, $\varphi(x)$ in $\bar{v}$ un polo d'ordine n, invece di $f(x)$, $\varphi(x)$ si potranno considerare le funzioni:

$$\bar{f}(x) = (m-1)!\,\frac{\bar{u}^m}{(\bar{u}-x)^m},$$

$$\bar{\varphi}(x) = (n-1)!\,\frac{\bar{v}^n}{(\bar{v}-x)^n},$$

i cui elementi corrispondenti all'origine sono:

$$\bar{P}(x) = \sum_{h=m-1}^{\infty} h(h-1)\ldots(h-m+2)\left(\frac{x}{\bar{u}}\right)^{h-m+1} =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)(h+2)\ldots(h+m-1)\left(\frac{x}{\bar{u}}\right)^h,$$

$$\bar{Q}(x) = \sum_{h=n-1}^{\infty} h(h-1)\ldots(h-n+2)\left(\frac{x}{\bar{v}}\right)^{h-n+1} =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)(h+2)\ldots(h+n-1)\left(\frac{x}{\bar{v}}\right)^h.$$

La serie:

$$\bar{R}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)(h+2)\ldots(h+m-1)$$

$$(h+1)(h+2)\ldots(h+n-1)\left(\frac{x}{\bar{u}\,.\,\bar{v}}\right)^h$$

genera una funzione $\bar{\psi}(x)$, avente, come ora dimostreremo, un polo d'ordine $m+n-1$ in $\bar{u}\ \bar{v}$.

Il teorema è vero evidentemente per $n=1$, giacchè allora:

$$\bar{R}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)(h+2)\ldots(h+m-1)\left(\frac{x}{\bar{u}\ \bar{v}}\right)^h =$$

$$= (m-1)!\,\frac{(\bar{u}\ \bar{v})^m}{(\bar{u}\ \bar{v}-x)^m};$$

basterà quindi dimostrarlo per induzione completa.

Si ha: *

$$(h+m)(h+m+1)\ldots(h+m+n-2) =$$

* A. Capelli, *Lezioni di algebra complementare*, Napoli, 1895, pag. 99, dove in luogo di x, y, n deve porsi rispettivamente $h+1$, $m-1$, $n-1$.

$$= (h+1)(h+2)\dots(h+n-1) +$$

$$+ \binom{n-1}{1}(h+1)(h+2)\dots(h+n-2)(m-1) +$$

$$+ \binom{n-1}{2}(h+1)(h+2)\dots(h+n-3)(m-1)m + \dots +$$

$$+ \binom{n-1}{n-2}(h+1)(m-1)m(m+1)\dots(m+n-4) +$$

$$+ (m-1)m(m+1)\dots(m+n-3),$$

quindi:

$$\overline{R}(x) = \sum_{h=0}^{\infty}(h+1)(h+2)\dots(h+m-1)(h+m)\dots$$

$$\dots(h+m+n-2)\left(\frac{x}{\overline{u}\ \overline{v}}\right)^h -$$

$$-\binom{n-1}{1}(m-1)\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)(h+2)\dots$$

$$\dots(h+m-1)(h+1)(h+2)\dots(h+n-2)\left(\frac{x}{\overline{u}\ \overline{v}}\right)^h -$$

$$-\binom{n-1}{2}(m-1)(m-2)\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)(h+2)\dots$$

$$\dots(h+m-1)(h+1)(h+2)\dots(h+n-3)\left(\frac{x}{\overline{u}\ \overline{v}}\right)^h -$$

$$-\dots-\binom{n-1}{n-2}(m-1)m(m+1)\dots$$

$$\dots(m+n-4)\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)(h+2)\dots$$

$$\ldots(h+m-1)(h+1)\left(\frac{x}{\bar{u}\ \bar{v}}\right)^h - (m-1)\,m\,(m+1)\ldots$$

$$\ldots(m+n-3)\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)(h+2)\ldots(h+m-1)\left(\frac{x}{\bar{u}\ \bar{v}}\right)^h.$$

Il 1° termine del 2° membro è l'elemento corrispondente all'origine della funzione analitica:

$$(m+n-2)!\,\frac{(\bar{u}\ \bar{v})^{m+n-1}}{(\bar{u}\ \bar{v}-x)^{m+n-1}}$$

avente un polo d'ordine $m+n-1$ in $\bar{u}\ \bar{v}$; quanto agli altri termini, le serie che vi compaiono sono quelle che si avrebbero da $\bar{R}(x)$ ponendo $n-1$, $n-2,\ldots$ in luogo di m, quindi — poichè il teorema si suppone vero per tutti i valori di n minori di quello considerato — sono elementi di funzioni analitiche aventi rispettivamente un polo d'ordine $n-2$, $n-3,\ldots$ in $\bar{u}\ \bar{v}$. Dunque l'intera espressione genera una funzione analitica $\bar{\psi}(x)$ avente in $\bar{u}\ \bar{v}$ precisamente un polo d'ordine $m+n-1$.

Lo stesso potrà dirsi, pel principio esposto nell'art. prec., della funzione $\psi(x)$ dipendente da $f(x)$, $\varphi(x)$ a tenore del teorema dell'art. 257.

260. Hurwitz ha dato un teorema analogo a quello di Hadamard, che fu pure dimostrato per altra via da Pincherle: *

* Anche qui noi adottiamo la dimostrazione di quest'ultimo, riducendola a forma elementare.

Se si indicano genericamente con u, v i punti singolari delle funzioni analitiche $f(x)$, $\varphi(x)$ generate dalle serie di potenze:

$$P\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{a_h}{x^{h+1}},\qquad Q\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{b_h}{x^{h+1}},$$

la funzione analitica $\psi(x)$ generata dalla serie di potenze:

$$R\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{c_h}{x^{h+1}},$$

dove:

$$c_h=\sum_{i=0}^{h}\binom{h}{i}a_{h-i}\,b_i=\sum_{i=0}^{h}\binom{h}{i}a_i\,b_{h-i},$$

non può avere altri punti singolari che i punti u, v, $u+v$.

Si ha:

$$R\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{h}\binom{h}{i}\frac{a_i\,b_{h-i}}{x^{h+1}}=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\left[a_i\sum_{h=i}^{\infty}\binom{h}{i}\frac{b_{h-i}}{x^{h+1}}\right]=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\sum_{h=0}^{\infty}\binom{h+i}{i}\frac{b_h}{x^{h+i+1}},$$

$$\varphi^{(i)}(x)=(-1)^i\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)(h+2)\ldots(h+i)\frac{b_h}{x^{h+i+1}}=$$

$$=(-1)^i\,i!\sum_{h=0}^{\infty}\binom{h+i}{i}\frac{b_h}{x^{h+i+1}},$$

quindi:

$$R\left(\frac{1}{x}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\,\frac{a_i}{i!}\,\varphi^{(i)}(x).$$

Inoltre:

$$\varphi^{(i)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \varphi^{(i+r)}(x-t)\, t^r, \qquad (1)$$

quindi:

$$R\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i!\, r!} a_i\, \varphi^{(i+r)}(x-t)\, t^r,$$

ossia, posto $i + r = n$:

$$R\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(x-t)}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a_i\, t^{n-i} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(t) \frac{\varphi^{(n)}(x-t)}{n!}, \qquad (2)$$

dove:

$$\mu_n(t) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a_i\, t^{n-i}.$$

Se in particolare si suppone:

$$b_0 = 1,\ b_1 = b_2 = \ldots = 0,$$

ossia $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, si ha $c_h = a_h$, e quindi:

$$\psi(x) = f(x);$$

e poichè in questo caso:

$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}},$$

ne segue, per la (2):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu_n(t) \frac{1}{(x-t)^{n+1}}.$$

Questa serie converge all'esterno del cerchio di centro t che contiene all'interno o sul contorno tutti i punti singolari di $f(x)$; detto quindi $\bar{u}$ uno di quelli tra i punti singolari che hanno la massima distanza da t, la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(t)\, y^n$$

avrà raggio di convergenza:

$$\sigma = \frac{1}{|t - \bar{u}|}.$$

D'altra parte, se $\bar{v}$ è un certo punto singolare di $\varphi(x)$, la serie (1) sarà convergente entro il cerchio di raggio:

$$\tau = |x - t - \bar{v}|.$$

Ripetendo un ragionamento fatto nell'art. 257, può dedursi di qui che il raggio di convergenza della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(t) \frac{\varphi^{(n)}(x-t)}{n!} z^n$$

è almeno $\sigma\tau$, e quindi che la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(t) \frac{\varphi^{(n)}(x-t)}{n!}$$

converge per $1 < \sigma\tau$, ossia per:

$$1 < \frac{|x - t - \bar{v}|}{|t - \bar{u}|}.$$

L'equazione:

$$\frac{|x - t - \bar{v}|}{|t - \bar{u}|} = 1$$

rappresenta un cerchio di centro $t + \bar{v}$ e di raggio $|t - \bar{u}|$; è facile riconoscere che questo cerchio passa pel punto $\bar{u} + \bar{v}$. Di qui si deduce, con un ragionamento analogo a quello dell'art. 257, che $\bar{u} + \bar{v}$ è in generale un punto singolare di $\psi(x)$. Siccome poi l'origine è un punto singolare tanto per $f(x)$ che per $\varphi(x)$, così può prendersi $\bar{u} = 0$ oppure $\bar{v} = 0$.

Studi intorno alla distribuzione dei punti singolari d'una serie di potenze sulla periferia del suo cerchio di convergenza. * Ricerche di Pringsheim. **

261. Le ricerche indicate nel titolo sono in gran parte di data recentissima, e dovute a diversi autori, sicchè hanno carattere incompleto e frammentario. Esse possono raggrupparsi sotto i punti seguenti:

---

* Borel 19, 23, 24, 25, Desaint 44 *bis*, Fabry 49, 50, 51, 52, Hadamard 66, 67, Koenig 85, Leau 96, 97, 98, Lecornu 99, Lerch 103, 105, Lindeloef 106, 107, Mittag-Leffler 126, 127, Le Roy 179, 180, Servant 189, Staeckel 191, Thomé 199, Vivanti 210.

** Pringsheim 164, 165, 166, 168, 169, 171, 173, 175, 176.

a) Condizioni perchè una serie di potenze abbia un solo punto singolare sulla circonferenza di convergenza;

b) Condizioni perchè un dato punto della circonferenza di convergenza sia, o non sia, punto singolare;

c) Condizioni perchè tutti, o non tutti, i punti della circonferenza di convergenza sieno punti singolari.

Dei risultati ottenuti, alcuni sono enunciati senza dimostrazione, altri, forse, hanno bisogno di essere più profondamente discussi, pochissimi presentano un aspetto semplice e definitivo che dia loro il diritto di entrare a far parte del patrimonio comune dell'Analisi.

Noi ci limiteremo quindi ad un brevissimo cenno su questo argomento. Faremo eccezione per un solo autore, il Pringsheim, il quale ha esposto le sue ricerche con ordine ed estensione tali, da renderne possibile un riassunto sistematico.

262. Sin dal 1887, Lecornu diede il seguente risultato: *Se la serie di potenze* $P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ *ha un solo punto singolare* u *sulla circonferenza di convergenza, si ha* $\lim_{h=\infty} \frac{a_h}{a_{h+1}} = u$, *e reciprocamente.*

Hadamard osservò che questo teorema non è sempre vero.

La prima parte di esso sussiste quando u è un polo. — Detto m l'ordine del polo, $f(x)$ la funzione analitica generata dalla serie di potenze

data, si avrà:

$$f(x) = \frac{A_m}{(u-x)^m} + \frac{A_{m-1}}{(u-x)^{m-1}} + \ldots +$$
$$+ \frac{A_1}{u-x} + g(x),$$

dove $g(x)$ è una funzione regolare in u e avente tutte le altre singolarità di $\psi(x)$. Poichè sulla circonferenza di raggio ρ (dove $\rho = |u|$) col centro nell'origine $f(x)$ non ha altre singolarità oltre u, $g(x)$ sarà regolare su questa circonferenza, e il suo elemento $Q(x)$ corrispondente all'origine avrà raggio di convergenza $\rho' > \rho$. Poniamo ora:

$$\varphi(x) = \frac{A_m}{(u-x)^m} + \frac{A_{m-1}}{(u-x)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{u-x};$$

l'elemento $R(x)$ di questa funzione corrispondente all'origine avrà raggio di convergenza ρ. Sarà poi:

$$R(x) = \frac{A_m}{u^m} \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)(h+2)\ldots(h+m-1)\left(\frac{x}{u}\right)^h +$$
$$+ \frac{A_{m-1}}{u^{m-1}} \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)(h+2)\ldots(h+m-2)\left(\frac{x}{u}\right)^h +$$
$$+ \ldots + \frac{A_1}{u} \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{x}{u}\right)^h =$$
$$= \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{x}{u}\right)^h \left[\frac{A_m}{u^m}(h+1)(h+2)\ldots(h+m-1) + \right.$$
$$\left. + \frac{A_{m-1}}{u^{m-1}}(h+1)(h+2)\ldots(h+m-2) + \ldots + \frac{A_1}{u}\right] =$$
$$= \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h.$$

Ne segue:

$$\frac{b_h}{b_{h+1}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{u^{h+m}}\left[A_m(h+1)\ldots(h+m-1)+\ldots+A_1 u^{m-1}\right]}{\frac{1}{u^{h+m+1}}\left[A_m(h+2)\ldots(h+m)+\ldots+A_1 u^{m-1}\right]},$$

e di qui:

$$\lim_{h=\infty} \frac{b_h}{b_{h+1}} = u.$$

Ora le due serie $P(x)$, $R(x)$ sono egualmente singolari, perchè la serie $P(x) - R(x)$ ha raggio di convergenza maggiore del loro raggio comune di convergenza; quindi (art. 252):

$$\lim_{h=\infty} \frac{a_h}{a_{h+1}} = \lim_{h=\infty} \frac{b_h}{b_{h+1}} = u.$$

Quanto alla seconda parte del teorema, essa deve, secondo Hadamard, modificarsi come segue: *Se* $\lim\limits_{h=\infty} \frac{a_h}{a_{h+1}} = u$, *e se inoltre, posto:*

$$\frac{a_h}{a_{h+1}} - u = \varepsilon_h,$$

$\left|\sqrt[h]{\varepsilon_h}\right|$ *si mantiene minore d'una quantità* γ *minore di* 1, *la serie* $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ *ha sulla circonferenza di convergenza il solo punto singolare* u.

263. L'esistenza e la disposizione dei punti singolari d'una serie di potenze $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ sulla sua circonferenza di convergenza dipendono dalla natura della funzione a_h di h.

Le Roy e Leau hanno indicato parecchi tipi di tale funzione, pei quali sulla circonferenza di convergenza v'ha un solo punto singolare. Fabry ha dato la condizione necessaria e sufficiente perchè ciò abbia luogo. Lindelöf ha esposto un metodo per riconoscere se un dato punto della circonferenza di convergenza è punto singolare.

Del problema *c)* dell'art. 261 si sono occupati, fra gli altri, Leau, Borel, Fabry. Questi due ultimi sono giunti ad una conclusione paradossale,* che vedremo più innanzi (art. 268) confermata da Pringsheim: *Se una serie di potenze è affatto generale* (cioè se non v'è alcuna dipendenza fra i primi n coefficienti di essa ed il successivo), *tutti i punti della circonferenza di convergenza sono*

---

* Diciamo che questa conclusione è *paradossale*, perchè sino ad un'epoca relativamente recente non si sospettava neppure la possibilità di funzioni esistenti solo in una parte del piano. Del resto si è ripetuto qui ciò che è avvenuto in altre parti dell'Analisi: mentre dapprima si ammetteva che tutte le funzioni fossero integrabili, derivabili, etc., è noto ora che una funzione *affatto generale* non è nè integrabile nè derivabile; che cioè affinchè essa possieda queste proprietà bisogna che soddisfaccia a certe condizioni speciali. Ciò che, nell'un caso e nell'altro, ha tratto in inganno gli analisti, è la circostanza che alle condizioni accennate soddisfanno tutte le funzioni che più comunemente si presentano nelle ricerche matematiche.

singolari, e quindi la funzione di cui la serie considerata è un elemento non è continuabile * *oltre questa circonferenza.* In altre parole, perchè non tutti i punti della circonferenza di convergenza sieno singolari, i coefficienti della serie devono soddisfare a certe condizioni.

264. Venendo alle ricerche di Pringsheim, premettiamo un'osservazione.

Se una serie di potenze a coefficienti positivi ha raggio di convergenza finito ρ, *il punto* $x = \rho$ *è per essa un punto singolare.*

Sia:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$$

la serie considerata, e con raggio $c < \rho$ si descriva una circonferenza avente il centro nell'origine; si denoti con $x = x_0$ un punto qualunque di questa circonferenza, mentre $x = c$ è il suo punto d'incontro colla parte positiva dell'asse reale. Sarà:

$$P(x \mid c) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} P^{(r)}(c)\,(x - c)^r, \qquad (1)$$

$$P(x \mid x_0) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} P^{(r)}(x_0)\,(x - x_0)^r, \qquad (2)$$

* In questo capitolo, parlando di *continuazione analitica*, intenderemo sempre che questa frase abbia il significato attribuito ad essa da Weierstrass.

inoltre:

$$|P^{(r)}(x_0)| = \left| \sum_{h=r}^{\infty} (h+r)(h+r-1)\ldots(h+1) a_{h+r} x_0^h \right| \leq$$

$$\leq \sum_{h=r}^{\infty} (h+r)(h+r-1)\ldots(h+1) a_{h+r} c^h = P^{(r)}(c),$$

sicchè i coefficienti della (1) sono rispettivamente maggiori o eguali ai valori assoluti dei coefficienti omologhi della (2). Ne segue che il raggio di convergenza $\theta(c)$ della (1) non sarà maggiore di quello $\theta(x_0)$ della (2):

$$\theta(c) \leq \theta(x_0).$$

Ora, poichè i punti singolari posti sulla circonferenza ρ (la quale ne contiene necessariamente) formano un aggregato chiuso, l'insieme delle loro distanze dal punto c ammetterà un minimo δ. Supposto il punto $x = \rho$ non singolare, sarà $\delta > \rho - c$; sia x_1 il punto, od uno dei punti singolari che distano da c della quantità δ, e scegliamo x_0 appunto sul raggio $0\,x_1$. Sarà allora:

$$\theta(c) = \delta, \quad \theta(x_0) = |x_1 - x_0| = \rho - c < \delta;$$

il che è impossibile. Dunque $x = \rho$ è un punto singolare.

265. Abbiasi un'espressione aritmetica $F(x)$, che in un certo campo connesso C rappresenti una funzione analitica $f(x)$. Se c è un punto interno a C, si ha:

$$f(c) = F(c), \quad f^{(r)}(c) = F^{(r)}(c) \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

quindi, per ogni punto x d'un certo intorno di c:

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(c)(x-c)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F^{(r)}(c)(x-c)^r .$$

Se invece c è un punto singolare di $f(x)$, possono aver luogo i seguenti casi:

a) $F(x)$ e le sue derivate non sono finite e determinate nel punto c;

b) $F(x)$ e le sue derivate sono finite e determinate, ma la serie:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F^{(r)}(c)(x-c)^r \tag{1}$$

ha raggio di convergenza nullo;

c) La serie (1) ha raggio di convergenza diverso da zero. In questo caso però pei punti x del suo cerchio di convergenza che appartengono al campo di esistenza di $f(x)$ non può aver luogo l'eguaglianza:

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F^{(r)}(c)(x-c)^r ;$$

cioè la serie non rappresenta la funzione considerata.

Il primo caso ha luogo, per es., quando c è polo d'uno dei termini di $F(x)$. *

---

* Se fosse polo di più termini, potrebbe avvenire che le diverse singolarità si distruggessero a vicenda.

Il secondo caso si verifica, sotto certe circostanze (cfr. p. es. art. 247), quando c, senza essere polo d'alcun termine di $F(x)$, è punto limite dell'insieme di tali poli. Eccone un esempio semplice.

Sia:

$$F(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \frac{1}{1 + a^h x}, \tag{2}$$

dove $a > 1$. I poli di $F(x)$ sono i punti $x = -\frac{1}{a^h}$; essi stanno sulla parte negativa dell'asse reale ed hanno per punto limite l'origine.

Le derivate di $F(x)$ sono:

$$F^{(r)}(x) = (-1)^r r! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \frac{a^{hr}}{(1 + a^h x)^{r+1}}$$

$$(r = 1, 2, \ldots),$$

quindi si ha:

$$F(0) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} = e,$$

$$F^{(r)}(0) = (-1)^r r! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{hr}}{h!} = (-1)^r r! \, e^{a^r} \; (r = 1, 2, \ldots),$$

sicchè la funzione e le sue derivate sono tutte finite nell'origine. La (1) diviene:

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r e^{a^r} x^r. \tag{3}$$

Ora si ha, da un certo valore di r in avanti:

$$a^r > r^2, \text{*} \tag{4}$$

quindi:

$$\sqrt[r]{|(-1)^r e^{ar}|} = \sqrt{e^{ar}} = e^{\frac{1}{r}ar} > e^r;$$

al crescere di r, e^r tende ad ∞, quindi (art. 90) il raggio di convergenza della (3) è nullo.

Dall'esempio costruito se ne deduce immediatamente un altro, ponendo nella (2) a^2, x^2 in luogo di a, x. Si ottiene così l'espressione aritmetica:

$$F(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \frac{1}{1 + a^{2h} x^2}, \tag{5}$$

ossia:

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \left(\frac{1}{1 + i\, a^h x} + \frac{1}{1 - i\, a^h x} \right);$$

---

* Non volendo far uso dei risultati forniti dal Calcolo, si può dimostrare elementarmente questa diseguaglianza come segue.

Si ha:

$$a^r = e^{r \lg a} = 1 + \frac{r \lg a}{1!} + \frac{r^2 \lg^2 a}{2!} + \frac{r^3 \lg^3 a}{3!} + \ldots > \frac{r^3 \lg^3 a}{6};$$

ora, se:

$$r > \frac{6}{\lg^3 a},$$

ne segue:

$$a^r > r^2.$$

Analogamente si dimostra che, preso un numero qualunque q, può trovarsi un numero k abbastanza grande perchè per ogni $r > k$ sia:

$$a^r > r^q.$$

i suoi poli sono i punti $x = \pm \frac{i}{a^h}$, i quali giacciono sull'asse imaginario, sono simmetricamente posti rispetto all'origine, ed hanno questa per punto limite. Si ha:

$$F^{(r)}(x) =$$
$$= \frac{i^r}{2} r! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{hr}}{h!} \left(\frac{1}{(1 - i a^h x)^{r+1}} + \frac{(-1)^r}{(1 + i a^h x)^{r+1}} \right),$$

quindi:

$$F(0) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} = e,$$

$$F^{(r)}(0) = \frac{i^r}{2} r! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{hr}}{h!} (1 + (-1)^r),$$

da cui:

$$F^{(2s)}(0) = (-1)^s (2s)! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{2hs}}{h!} = (-1)^s (2s)! e^{a^{2s}},$$
$$F^{(2s+1)}(0) = 0.$$

La serie (1) diviene:

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s e^{a^{2s}} x^{2s};$$

colle stesse considerazioni di prima si dimostra che essa è divergente.

Questo esempio è notevole sotto un altro punto di vista. Se consideriamo la $F(x)$ data dalla (5) come una funzione *reale* della variabile *reale* x, essa è finita e continua insieme a tutte le sue derivate per ogni valor finito di x, e tuttavia per $x = 0$

non è sviluppabile in serie di Taylor. La possibilità di un tal fatto, non ammessa da Lagrange, fu posta in luce già da Cauchy e, più tardi, da Du Bois-Reymond; perchè esso possa aver luogo, ce lo mostra chiaramente l'esempio che consideriamo. Fissando la nostra attenzione sui soli valori reali della x, noi veniamo a trascurare una gran parte del suo campo di variabilità; e quindi ci sfuggono tutti i poli dell'espressione aritmetica considerata che non giacciono sull'asse reale. Se pertanto v'è un punto dell'asse reale che, senza essere un polo, sia punto limite d'infiniti poli complessi, in quel punto l'espressione e le sue derivate saranno finite, ma non sarà possibile lo sviluppo in serie di Taylor in alcun suo intorno (anche soltanto lineare); e la ragione di questo fatto ci apparirà solo quando, estendendo la nostra attenzione all'intero campo complesso, osserveremo che qualunque intorno (a due dimensioni) di quel punto contiene dei poli.

266. Modificando lievemente l'espressione (2) dell'art. prec., possiamo ottenere un esempio del terzo dei casi enumerati nell'articolo stesso.

Sia:

$$F(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} \frac{1}{1 + a^h x}, \tag{1}$$

dove $a > 1$. I poli di $F(x)$ saranno ancora i punti $x = -\frac{1}{a^h}$, posti sulla parte negativa dell'asse reale, ed aventi per punto limite l'origine. Sarà

poi:

$$F^{(r)}(x) = (-1)^r r! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} \frac{a^{hr}}{(1+a^h x)^{r+1}},$$

e quindi:

$$F(0) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} = e^{-1},$$

$$F^{(r)}(0) = (-1)^r r! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} a^{hr} = (-1)^r r! e^{-a^r}.$$

Lo sviluppo (1) dell'art. prec. diverrà:

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r e^{-a^r} x^r; \tag{2}$$

ora:

$$\sqrt[r]{|(-1)^r e^{-a^r}|} = e^{-\frac{1}{r}a^r}, \tag{3}$$

inoltre come risulta dalla (5) dell'art. precedente, $\lim_{r=\infty} \frac{1}{r} a^r = \infty$, quindi i valori (3) formano una successione avente per limite zero, che è anche l'unico punto limite del loro insieme. Ne segue (art. 90) che la serie (2) ha raggio di convergenza infinito.

Naturalmente però non v'è alcun intorno dell'origine in tutti i punti del quale le espressioni (1), (2) abbiano lo stesso valore. Prendasi infatti un intorno qualunque dell'origine, e sia $-a^{-k}$ uno dei punti $-a^{-1}$, $-a^{-2}$, $-a^{-3}$, ... in esso contenuti. Nel punto $-a^{-k}$ la (1) diventa infinita, mentre la (2) prende il valor finito:

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r e^{-a^r} (-a^{-k})^r = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-a^r} a^{-kr} = K;$$

scelta pertanto ad arbitrio una quantità positiva λ maggiore di $|K|$, potrà trovarsi un intorno di $-a^{-k}$ in tutti i punti del quale il modulo di (2) sia minore di λ e il modulo di (1) sia maggiore di λ. Con ciò è dimostrato l'asserto.

Per renderci ragione di questo fatto, poniamo:

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x),$$

dove:

$$F_1(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h)!} \frac{1}{1 + a^{2h} x},$$

$$F_2(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)!} \frac{1}{1 + a^{2h+1} x}.$$

Sarà:

$$F_1(0) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h)!} = \cos i = \frac{1}{2}(e + e^{-1}),$$

$$F_1^{(r)}(0) = (-1)^r r! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{2hr}}{(2h)!} = (-1)^r r! \cos i a^r =$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^r r! (e^{ar} + e^{-ar}),$$

$$F_2(0) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)!} = \frac{\operatorname{sen} i}{i} = \frac{1}{2}(e - e^{-1}),$$

$$F_2^{(r)}(0) = (-1)^r r! \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{(2h+1)r}}{2h+1!} =$$

$$= (-1)^r r! \frac{\operatorname{sen} i a^r}{i} = \frac{1}{2}(-1)^r r! (e^{ar} - e^{-ar}).$$

Le serie:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F_1^{(r)}(0)\, x^r\,, \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F_2^{(r)}(0)\, x^r \tag{4}$$

hanno, come è facile vedere, raggio di convergenza nullo; però nella serie:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} [F_1^{(r)}(0) - F_2^{(r)}(0)]\, x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F^{(r)}(0)\, x^r$$

le parti dei coefficienti delle (4) che tendono ad infinito si elidono, sicchè la serie stessa ha raggio di convergenza diverso da zero, anzi infinito. D'altra parte tanto i poli di $F_1(x)$ che quelli di $F_2(x)$ hanno per punto limite l'origine; nè essi possono elidersi tra loro, perchè sono diversi. La esistenza di questi poli ci assicura che $F(x)$ non è sviluppabile in serie di Taylor in alcun intorno dell'origine; mentre l'elisione casuale di certi termini nei coefficienti ci spiega come possa avvenire che lo sviluppo di Taylor relativo all'origine abbia raggio di convergenza diverso da zero.

Anche qui possiamo ottenere un altro esempio interessante, ponendo nella (1) a^2, x^2 in luogo di a, x. Abbiamo così l'espressione:

$$F(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} \frac{1}{1 + a^{2h} x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} \left(\frac{1}{1 + i\, a^h x} + \frac{1}{1 - i\, a^h x} \right),$$

i cui poli sono i punti $x = \pm \dfrac{i}{a^h}$ posti sull'asse

imaginario e aventi per punto limite l'origine. Si ottiene in questo caso:

$$F(0) = e^{-1},$$
$$F^{(2s)}(0) = (-1)^s (2s)!\, e^{-a^{2s}},$$
$$F^{(2s+1)}(0) = 0,$$

sicchè la (1) dell'art. prec. diviene:

$$\varphi(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s e^{-a^{2s}} x^{2s};$$

essa è convergente per ogni valore finito di x. Però non v'è alcun intorno dell'origine in tutti i punti del quale sia $F(x) - \varphi(x) = 0$.

Osservando che:

$$\varphi(0) = F(0), \qquad \varphi^{(r)}(0) = F^{(r)}(0),$$

può anche concludersi, che l'espressione aritmetica:

$$\psi(x) = F(x) - \varphi(x)$$

è nulla insieme a tutte le sue derivate nell'origine senza essere identicamente nulla.

267. Dalle cose dette discendono altre considerazioni importanti.

Abbiasi una serie di potenze $P(x)$, il cui raggio di convergenza sia ρ. Del modo di comportarsi di $P(x)$ nei punti della circonferenza ρ nulla può dirsi in generale; soltanto si sa che questa contiene almeno un punto singolare. Però dalle teorie esposte non appare alcun rapporto diretto tra l'essere un punto c della circonferenza singolare o no e la convergenza o meno della serie $P(x)$

per $x = c$; ed è interessante studiare se esista o no un tale rapporto. Orbene, noi mostreremo come possa costruirsi una serie di potenze $P(x)$ tale, che tutti i punti della sua circonferenza di convergenza sono punti singolari, mentre la serie stessa e le sue derivate sono convergenti in tutti quei punti.

Sia:

$$F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{a - x^{m_h}}, \tag{1}$$

dove le a_h sono quantità positive tali che $\sum_{h=1}^{\infty} a_h$ sia convergente, a è una quantità reale maggiore di 1, e $m_1, m_2, \ldots$ sono numeri interi e positivi di cui ciascuno è multiplo del precedente. La serie (1) è convergente per $|x| \leq 1$; infatti:

$$|a - x^{m_h}| \geq a - |x|^{m_h} \geq a - |x| \geq a - 1,$$

quindi:

$$\left| \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{a - x^{m_h}} \right| \leq \frac{1}{a-1} \sum_{h=1}^{\infty} a_h .$$

Inoltre essa è equiconvergente in ogni cerchio, col centro nell'origine, di raggio $\rho' < 1$. Infatti, presa σ ad arbitrio, può determinarsi n in modo che sia:

$$\sum_{h=n}^{\infty} a_h < (a - \rho')\sigma;$$

ma, per $|x| \leq \rho'$, si ha:

$$|a - x^{m_h}| \geq a - |x|^{m_h} \geq a - |x| \geq a - \rho',$$

quindi:

$$\left| \sum_{h=n}^{\infty} \frac{a_h}{a - x^{m_h}} \right| \leq \frac{1}{a - \rho'} \sum_{h=n}^{\infty} a_h < \sigma.$$

Ne segue, che può trovarsi una serie di potenze $P(x)$, avente raggio di convergenza almeno eguale ad 1, la quale sia rappresentata dall'espressione aritmetica $F(x)$ nell'intorno dell'origine; tale serie si ottiene sviluppando in serie di potenze ciascun termine della (1) ed applicando il lemma di Weierstrass, ed è evidente che i suoi coefficienti sono numeri reali e positivi. Vogliamo stabilire che il raggio di convergenza di $P(x)$ è precisamente eguale ad 1.

Scriviamo:

$$F(x) = \frac{a_s}{a - x^{m_s}} + \sum_{h=1}^{\infty}{}^{(s)} \frac{a_h}{a - x^{m_h}}, \qquad (2)$$

dove l'indice s posto in alto significa la mancanza del termine corrispondente ad $h = s$. Sviluppando i due termini della (2) in serie di potenze $P_s(x)$, $Q_s(x)$, si avrà:

$$P(x) = P_s(x) + Q_s(x);$$

inoltre, poichè i coefficienti di $P_s(x)$ e di $Q_s(x)$ sono reali e positivi, i coefficienti di $P(x)$ saranno eguali o maggiori dei corrispondenti di $P_s(x)$ e di $Q_s(x)$, e per conseguenza il raggio di convergenza ρ di $P(x)$ sarà eguale o minore di quelli delle altre due serie. Ora il raggio di convergenza di $P_s(x)$ è $a^{\frac{1}{m_s}}$, quindi per ogni valore

di s sarà:

$$\rho \leq a^{\frac{1}{m_s}};$$

ma al crescere indefinitamente di s anche m_s cresce indefinitamente, ed $a^{\frac{1}{m_s}}$ tende ad 1, sicchè $\rho \leq 1$. Può pertanto concludersi che il raggio di convergenza di $P(x)$ è 1.

Ne segue (art. 264) che $x = 1$ è un punto singolare di $P(x)$.

La serie:

$$\Phi(x) = \sum_{h=k+1}^{\infty} \frac{a_h}{a - x^{m_h}},$$

dove k è un numero qualunque, può convertirsi in una serie di potenze $R(x)$, il cui raggio di convergenza, come si dimostrerebbe collo stesso ragionamento di prima, è 1. Ora, ricordando che, per ipotesi, m_{h+1} è divisibile per m_h per qualunque valore di h, si ha:

$$\Phi(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_{k+h}}{a - x^{m_{k+h}}} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_{k+h}}{a - y^{\frac{m_{k+h}}{m_k}}} = \Psi(y),$$

dove le quantità $\frac{m_{k+h}}{m_k}$ sono numeri interi e positivi che crescono indefinitamente con h, ed $y = x^{m_k}$.

La $\Psi(y)$, che è della stessa natura della $\Phi(x)$, si trasforma in una serie di potenze $S(y)$ a coefficienti positivi, il cui raggio di convergenza è 1, e di cui il punto $y = 1$ è un punto singolare;

quindi per la $R(x)$ saranno singolari tutti i punti dati da $x^{m_k} = 1$, ossia i punti:

$$1, \quad e^{\frac{2\pi i}{m_k}}, \quad e^{\frac{4\pi i}{m_k}}, \ldots, \quad e^{\frac{2(m_k-1)\pi i}{m_k}}. \tag{3}$$

In questi punti la $P(x) - R(x)$, che ha raggio di convergenza $a^{\frac{1}{m_k}} > 1$, è regolare, quindi essi sono punti singolari per la $P(x)$ qualunque sia k.

L'insieme dei punti (3) corrispondenti a tutti i possibili valori di k è denso su tutta la circonferenza unità, quindi (art. 126) tutti i punti di questa sono punti singolari di $P(x)$, la quale pertanto non è continuabile all'esterno del cerchio unità.

La $P(x)$, come si è già accennato, si ottiene dalla (1) sostituendo a ciascun termine $\frac{a_h}{a - x^{m_h}}$ il suo sviluppo:

$$\frac{a_h}{a} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x^{m_h}}{a}\right)^r$$

ed ordinando rispetto alle potenze di x. Ora, poichè la (1), per valori di x positivi e non maggiori di 1, è formata di termini positivi, e gli sviluppi che si sostituiscono ai singoli termini hanno pure tutti i loro elementi positivi, la serie ottenuta mediante la sostituzione sarà assolutamente convergente, e così pure lo sarà la $P(x)$ che se ne deduce mediante spostamenti di termini. La $P(x)$ è dunque convergente per $x = 1$, ed essendo a coefficienti positivi sarà a maggior ragione convergente per ogni x di modulo 1, cioè in ogni punto della circonferenza unità.

Assoggettando le a_h a nuove condizioni, potremo far sì che anche tutte le derivate di $P(x)$ sieno convergenti su questa circonferenza.

Scomponendo ciascun termine della (1) in frazioni semplici, e designando con ε_h una radice primitiva dell'unità d'ordine m_h, si ha: *

$$F(x) = -\sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m_h\, a^{\frac{m_h-1}{m_h}}}\sum_{t=0}^{m_h-1}\frac{\varepsilon_h^t\, a_h}{x-\varepsilon_h^t\, a^{\frac{1}{m_h}}}\right],$$

---

* Se si ha la frazione razionale $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, dove:

$$\varphi(x) = \prod_{t=1}^{n}(x-b_t)$$

e le b_t si suppongono tutte diverse tra loro, la decomposizione in frazioni semplici è data dalla formola:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \sum_{t=1}^{n}\frac{\frac{f(b_t)}{\varphi'(b_t)}}{x-b_t}.$$

Nel caso nostro si ha:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a_h}{a-x^{m_h}} = \frac{-a_h}{x^{m_h}-a},$$

$$\varphi(x) = \prod_{t=0}^{m_h-1}\left(x-\varepsilon_h^t\, a^{\frac{1}{m_h}}\right);$$

ne segue:

$$\frac{a_h}{a-x^{m_h}} = \sum_{t=0}^{m_h-1}\frac{-a_h}{m_h\left(\varepsilon_h^t\, a^{\frac{1}{m_h}}\right)^{m_h-1}}\,\frac{1}{x-\varepsilon_h^t\, a^{\frac{1}{m_h}}} =$$

$$= -\frac{1}{m_h\, a^{\frac{m_h-1}{m_h}}}\sum_{t=0}^{m_h-1}\frac{\varepsilon_h^t\, a_h}{x-\varepsilon_h^t\, a^{\frac{1}{m_h}}}.$$

da cui, essendo lecita la derivazione termine a termine, si ricava per $F^{(r)}(x)$ l'espressione:

$$(-1)^{r-1} r! \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m_h a^{\frac{m_h-1}{m_h}}} \sum_{t=0}^{m_h-1} \frac{\varepsilon_h^t a_h}{\left(x - \varepsilon_h^t a^{\frac{1}{m_h}}\right)^{r+1}} \right].$$

Ora, per $|x| \leq 1$, si ha:

$$\left| x - \varepsilon_h^t a^{\frac{1}{m_h}} \right| \geq a^{\frac{1}{m_h}} - 1;$$

d'altra parte, se k è un numero positivo:

$$e^k - 1 > k,$$

da cui in particolare, ponendo $k = \frac{1}{m_h} \lg a$:

$$a^{\frac{1}{m_h}} - 1 > \frac{1}{m_h} \lg a.$$

Ne segue:

$$\left| x - \varepsilon_h^t a^{\frac{1}{m_h}} \right| > \frac{1}{m_h} \lg a,$$

e quindi:

$$|F^{(r)}(x)| < r! \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m_h a^{\frac{m_h-1}{m_h}}} m_h a_h \left(\frac{\lg a}{m_h}\right)^{-r-1} \right]$$

$$= \frac{r!}{a \lg^{r+1} a} \sum_{h=1}^{\infty} a_h a^{\frac{1}{m_h}} m_h^{r+1} < \frac{r!}{\lg^{r+1} a} \sum_{h=1}^{\infty} a_h m_h^{r+1}.$$

Sottoponiamo le a_h alla condizione:

$$a_h < \frac{1}{m_h^h};$$

avremo allora:

$$| F^{(r)}(x) | < \frac{r!}{\lg^{r+1} a} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{m_h^{h-r-1}}.$$

Ma:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{m_h^{h-r-1}} = \sum_{h=1}^{r+1} \frac{1}{m_h^{h-r-1}} + \sum_{h=r+2}^{\infty} \frac{1}{m_h^{h-r-1}} =$$

$$= \sum_{h=1}^{r+1} \frac{1}{m_h^{h-r-1}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{m_{h+r+1}^{h}} <$$

$$< \sum_{h=1}^{r+1} \frac{1}{m_h^{h-r-1}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{m_{r+2}^{h}};$$

ora quest'ultima serie è convergente perchè:

$$m_{r+2} \geqq 2,$$

quindi è convergente anche la serie del primo membro. Ne segue che $F^{(r)}(x)$ ha valore finito per ogni x di modulo $\leqq 1$. Collo stesso ragionamento di prima se ne deduce che $P^{(r)}(x)$ è finita per ogni x di modulo $\leqq 1$.

Si è adunque costruito una serie di potenze assolutamente convergente insieme alle sue derivate in tutti i punti della sua circonferenza di conver-

genza, e di cui tutti questi punti sono punti singolari. *

268. Si è veduto che, se la funzione $f(x)$ rappresentata dall'espressione aritmetica $F(x)$ ha un punto singolare c, può avvenire, non solo che $F(x)$ e tutte le sue derivate sieno finite in c, ma inoltre che la serie:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F^{(r)}(c)(x-c)^r \qquad (1)$$

abbia raggio di convergenza diverso da zero.

Supponiamo in particolare che la $f(x)$ abbia per campo d'esistenza il cerchio unità, e sia quindi rappresentata completamente da un unico elemento $P(x)$ avente per punti singolari tutti i punti della circonferenza unità. Si domanda se può avvenire che tutte le serie (1) relative a questi punti abbiano raggio di convergenza diverso da zero.

Pringsheim ha dimostrato, con una considerazione assai semplice fondata sulla teoria delle funzioni di variabili reali, che, preso un arco qualunque di quella circonferenza, il limite inferiore dei raggi di convergenza delle serie (1) relative ai punti di tale arco è necessariamente zero.

Noi ci limiteremo a sviluppare un esempio nel quale è facile constatare l'avverarsi di questa circostanza.

---

* Possono anche costruirsi serie *convergenti non assolutamente* su tutta la circonferenza di convergenza; v. PRINGSHEIM 166.

Abbiasi l'espressione:

$$F(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} e^{a^h x i}, \tag{2}$$

dove a è un numero intero maggiore di 1. Posto $x = u + i v$, si ha:

$$F(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} e^{a^h(-v+iu)},$$

e la serie dei valori assoluti dei termini di $F(x)$ è:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} e^{-va^h}.$$

Ora, presa σ ad arbitrio, può scegliersi un numero n tale che sia:

$$\sum_{h=n}^{\infty} \frac{1}{h!} < \sigma;$$

d'altra parte per $v \geqq 0$ si ha:

$$e^{-va^h} \leqq 1,$$

quindi:

$$\sum_{h=n}^{\infty} \frac{1}{h!} e^{-va^h} \leqq \sum_{h=n}^{\infty} \frac{1}{h!} < \sigma,$$

e la serie (2) è assolutamente ed uniformemente convergente in tutto il semipiano superiore all'asse reale, compreso l'asse medesimo.

Lo stesso può dirsi di tutte le sue derivate. Si ha infatti:

$$F^{(r)}(x) = i^r \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^h x i};$$

la serie dei moduli dei termini è:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{-va^h}.$$

Confrontando questa colla serie convergente:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} = e^{a^r},$$

si ottiene il risultato voluto.

Consideriamo ora lo sviluppo (1) in serie di Taylor nell'intorno d'un punto c.

Dimostreremo che, fatta un'ipotesi particolare intorno ad a, questo sviluppo ha raggio di convergenza diverso da zero, anzi infinito, per un insieme di punti denso su tutto l'asse reale, ed ha raggio di convergenza nullo per un altro insieme di punti della stessa natura.

Prendiamo il punto:

$$c = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

dove m è un numero intero qualunque. Sarà:

$$F(c) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} e^{a^h i \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} (-1)^{ma^h} i^{a^h}.$$

Se supponiamo a un numero dispari della forma $4k+3$, avremo:

$$(-1)^{ma^h} = (-1)^m,$$
$$i^{a^h} = (-1)^h i, *$$

quindi:

$$F(c) = (-1)^m i \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} = (-1)^m i e^{-1}.$$

Inoltre:

$$F^{(r)}(c) = i^r \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^h i \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} =$$
$$= (-1)^m i^{r+1} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} a^{rh} = (-1)^m i^{r+1} e^{-a^r}.$$

La (1) diviene dunque pel punto c considerato:

$$(-1)^m \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} i^{r+1} e^{-a^r} (x-c)^r; \qquad (3)$$

ora:

$$\left| \frac{i^{r+1} e^{-a^r}}{r!} \right| < \frac{1}{r!},$$

---

* Basta ricordare che le potenze dispari di a sono della forma $4k+3$, le sue potenze pari della forma $4k+1$, per modo che può scriversi:

$$a^h = 4k_h + (-1)^h,$$

k_h denotando un numero intero. Si ha inoltre:

$$i^4 = 1, \quad i^{\pm 1} = \pm i,$$

quindi:

$$i^{a_h} = i^{4k_h} i^{(-1)^h} = (-1)^h i.$$

sicchè i coefficienti della (3) sono in valore assoluto minori di quelli della serie $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}(x-c)^r$, che ha raggio di convergenza infinito. Pertanto la (3) ha raggio di convergenza infinito.

Consideriamo ora il punto:

$$c = \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}{a^q},$$

dove q è un numero intero positivo qualunque. Avremo:

$$F(c) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} e^{a^{h-q}i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} =$$

$$= \sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} e^{a^{h-q}i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} + \sum_{h=q}^{\infty} \frac{1}{h!} e^{a^{h-q}i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$= \sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} e^{a^{h-q}i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} + (-1)^{m+q} i \sum_{h=q}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!}$$

$$= \sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!}\left[e^{a^{h-q}i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} - i(-1)^{m+q+h}\right] +$$

$$+ (-1)^{m+q} i \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!}.$$

Ora, poichè:

$$\left| e^{a^{h-q}i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} \right| = 1,$$

donde:

$$\left| e^{a^{h-q}i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} - i(-1)^{m+q+h} \right| \leq 2,$$

e poichè inoltre:

$$\sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} < q,$$

sarà:

$$\left| \sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} \left[e^{a^{h-q} i \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} - i(-1)^{m+q+h} \right] \right| < 2q,$$

quindi:

$$| F(c) | < 2q + e^{-1} < 2q + 1.$$

Analogamente:

$$F^{(r)}(c) = i^r \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^{h-q} i \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$= i^r \left[\sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^{h-q} i \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} + \right.$$

$$\left. + \sum_{h=q}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^{h-q} i \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} \right]$$

$$= i^r \left[\sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^{h-q} i \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{m+q} i \sum_{h=q}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} a^{rh} \right]$$

$$= i^r \left[\sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} a^{rh} \left\{ e^{a^{h-q} i \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} - i(-1)^{m+q+h} \right\} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{m+q} i \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} a^{rh} \right].$$

Ora:

$$\left| e^{a^h - qi\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi} - i\,(-1)^{m+q+h} \right| \leq 2,$$

$$\sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} a^{rh} < q\, a^{rq},$$

quindi:

$$| F^{(r)}(c) | < 2\, q\, a^{rq} + e^{-a^r} < (2\, q + 1)\, a^{rq}.$$

I coefficienti della (1) sono dunque pel punto c considerato minori in valore assoluto dei corrispondenti della serie:

$$(2\, q + 1) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^{rq}}{r!} (x - c)^r$$

che ha raggio di convergenza infinito, come si vede osservando che essa può scriversi:

$$(2\, q + 1) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} [a^q (x - c)]^r .$$

Ne segue che la (1) ha raggio di convergenza infinito.

I punti:

$$c = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi}{a^q} \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (4)$$

formano un insieme denso su tutto l'asse reale; cioè, preso un numero reale qualunque d ed un numero positivo qualunque σ, può trovarsi uno dei numeri (4) che differisca da d in valore assoluto per meno di σ.

Prendiamo a come base d'un sistema di numerazione; un numero reale qualunque, p. es. $\frac{2d}{\pi}$, sarà rappresentato da uno sviluppo finito od infinito della forma seguente:

$$\frac{2d}{\pi} = p_0 + \frac{p_1}{a} + \frac{p_2}{a^2} + \ldots, \tag{5}$$

dove p_0 è un numero intero positivo, nullo o negativo, $p_1, p_2, \ldots$ sono numeri interi non negativi e minori di a.

Supponiamo dapprima lo sviluppo finito, cioè:

$$\frac{2d}{\pi} = p_0 + \frac{p_1}{a} + \frac{p_2}{a^2} + \ldots + \frac{p_q}{a^q} =$$

$$= \frac{p_0 a^q + p_1 a^{q-1} + \ldots + p_q}{a^q} = \frac{n}{a^q},$$

dove n è un numero intero. Se n è dispari, posto $n = 2m + 1$, si ha:

$$d = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi}{a^q},$$

sicchè d è uno dei punti (4). Se n è pari, trovato un numero intero e positivo s tale che sia:

$$\frac{\pi}{2a^s} < \sigma,$$

e preso un numero intero t maggiore di s e di q,

si ponga:

$$c = \frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{a^q} + \frac{1}{a^t}\right) = \frac{(n\,a^{t-q} + 1)\,\pi}{2\,a^t}.$$

Poichè n è pari, $n\,a^{t-q} + 1$ è dispari, e c è uno dei punti (4); inoltre si ha:

$$c - d = \frac{\pi}{2\,a^t} < \frac{\pi}{2\,a^s} < \sigma.$$

Se invece lo sviluppo (5) è infinito, potrà scriversi:

$$\frac{2\,d}{\pi} = p_0 + \frac{p_1}{a} + \ldots + \frac{p_s}{a^s} + \frac{p_{s+1}}{a^{s+1}} + \ldots =$$

$$= \frac{n}{a^s} + \frac{p_{s+1}}{a^{s+1}} + \ldots,$$

e quindi, come è noto:

$$\frac{n+1}{a^s} > \frac{2\,d}{\pi} > \frac{n}{a^s},$$

ossia:

$$\frac{(n+1)\,\pi}{2\,a^s} > d > \frac{n\,\pi}{2\,a^s}.$$

L'uno o l'altro dei due termini estremi è uno dei numeri (4), ed ambidue differiscono da d per meno di σ, sicchè l'asserto resta dimostrato.

Prendiamo invece a considerare i punti:

$$c = \frac{m\,\pi}{a^q}\,(q = 0, 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

e supponiamo dapprima $q = 0$, cioè $c = m\,\pi$.

Avremo:

$$F(c) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} e^{a^h m\pi i} = (-1)^m \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} = (-1)^m e,$$

$$F^{(r)}(c) = i^r \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^h m\pi i} = i^r (-1)^m \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{rh}}{h!} =$$
$$= i^r (-1)^m e^{a^r};$$

la (1) diverrà:

$$(-1)^m \sum_{r=0}^{\infty} \frac{i^r e^{a^r}}{r!} (x-c)^r . \qquad (7)$$

Ora, poichè (art. 265) $a^r > r^2$, inoltre evidentemente $r! < r^r$, ne segue:

$$\sqrt[r]{\frac{e^{a^r}}{r!}} > \sqrt[r]{\frac{e^{r^2}}{r^r}} = \frac{e^r}{r};$$

ma $\frac{e^r}{r}$ cresce indefinitamente insieme ad r, quindi lo stesso può dirsi di $\sqrt[r]{\frac{e^{a^r}}{r!}}$, e la serie (7) ha (articolo 90) raggio di convergenza nullo.

Sia ora $q > 0$. Si ha:

$$F^{(r)}(c) = i^r \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^h - qm\pi i}$$

$$= i^r \left[\sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^h - qm\pi i} + \sum_{h=q}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^h - qm\pi i} \right]$$

$$= i^r \left[\sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} a^{rh} e^{a^h - qm\pi i} + (-1)^m \sum_{h=q}^{\infty} \frac{1}{h!} a^{rh} \right]$$

$$= i^r \left[\sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} a^{rh} (e^{a^h - qm\pi i} - (-1)^m) + (-1)^m e^{a^r} \right].$$

Ora:

$$\left| \sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} a^{rh} \left(e^{a^{h-q} m\pi i} - (-1)^m\right) \right| \leq$$

$$\leq 2 \sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} a^{rh} < 2\, q\, a^{rq};$$

d'altra parte, qualunque sia q, può trovarsi (articolo 265) un numero k tale, che per ogni $s > k$ sia:

$$e^s > s^{5q},$$

e quindi un numero j tale, che per ogni $r > j$ sia:

$$e^{a^r} > a^{5rq},$$

inoltre per s abbastanza grande si ha:

$$s^{4q} > 4\, q,$$

ossia:

$$a^{4rq} > 4\, q,$$

onde:

$$e^{a^r} > 4\, q\, a^{rq}.$$

Ne segue, da un certo valore di r in avanti:

$$| F^{(r)}(c) | > e^{a^r} - 2\, q\, a^{rq} > \frac{1}{2} e^{a^r},$$

sicchè nel caso considerato i coefficienti della (1) sono rispettivamente maggiori, in valore assoluto, di quelli della serie:

$$\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{a^r}}{r!} (x - c)^r,$$

che, come risulta da ciò che si disse poc'anzi, ha raggio di convergenza nullo.

Dunque la (1) ha raggio di convergenza nullo in tutti i punti (6). Questi punti costituiscono un insieme denso su tutto l'asse reale, come si dimostrerebbe ripetendo il ragionamento sviluppato riguardo ai punti (4).

Se nell'espressione $F(x)$ si fa il cambiamento di variabile:

$$y = e^{xi},$$

si ottiene dalla (2) la serie di potenze:

$$\Phi(y) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} y^{a^h}.$$

Osservando che $F(x)$ è convergente per $v \geqq 0$, e che $|y| = e^{-v}$, se ne deduce che $\Phi(y)$ è convergente per $|y| \leqq 1$. La circonferenza unità del piano y corrisponde all'asse reale del piano x; e però su quella circonferenza v'è un insieme denso di punti in ciascuno dei quali lo sviluppo di Taylor ha raggio di convergenza infinito ed un altro insieme denso di punti in ciascuno dei quali esso ha raggio di convergenza nullo.

269. Ecco finalmente come Pringsheim dimostra (cfr. art. 263) che il caso più generale per le serie di potenze è quello in cui tutti i punti della circonferenza di convergenza sono singolari.

Abbiasi una serie di potenze:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h,$$

il cui raggio di convergenza sia 1, e i cui coefficienti sieno reali e positivi.

Scegliamo una successione di numeri interi positivi $m_1, m_2, \ldots$, ciascuno dei quali sia multiplo del precedente, e scindiamo la serie $P(x)$ in due, di cui l'una $Q(x)$ formata dai termini dove figurano gli esponenti $m_1, m_2, \ldots$, l'altra $R(x)$ dai rimanenti, sicchè:

$$P(x) = Q(x) + R(x) = \sum_{r=1}^{\infty} a_{m_r} x^{m_r} + R(x).$$

Riguardo alla $Q(x)$, ripetendo un ragionamento già fatto nell'art. 267 si dimostra che tutti i punti della circonferenza unità sono per essa punti singolari. Ora, perchè $P(x)$ abbia su questa circonferenza un insieme non denso di punti singolari (e quindi sia continuabile al di là di essa), bisogna che le singolarità di $Q(x)$ distruggano in parte quelle di $R(x)$, e per conseguenza bisogna che tra i coefficienti delle due serie, o, ciò che è lo stesso, tra i coefficienti della serie $P(x)$, esistano delle relazioni. Se pertanto questi coefficienti sono tra loro affatto indipendenti, tutti i punti della circonferenza di convergenza sono punti singolari per la serie considerata.

LISTA BIBLIOGRAFICA.

1. Agnola (dell') C. A., *Estensione di un teorema di Hadamard.* Atti dell'Ist. Veneto, T. LVIII (1898-99), P. II, pag. 525-539.

1 *bis.* — *Sulle serie di polinomi.* Atti dell'Istit. Veneto, T. LX (1900-01), P. II, pag. 171-180.

2. Appell P., *Sur les fonctions uniformes d'un point analytique* (x, y). Acta math., T. I (1882), pag. 109 131, 132-144.

3. Arcais (d') F., *Sulle espressioni analitiche rappresentanti porzioni di funzioni analitiche diverse.* Riv. di mat., T. V (1895), pag. 186-189.

4. — *Sulle funzioni di una variabile complessa.* Atti dell'Ist. Ven., S. VII, T. IX (1897-98), pag. 1048-1050.

5. Arone (d') G., *Sur les fonctions à espaces lacunaires.* Bull. de la Soc. math. de France, T. XXIII (1895), pag. 193-194.

6. Arzelà C., *Sulla teoria delle funzioni analitiche.* Rend. dell'Acc. di Bologna, 1887-88, pag. 25-37.

7. Baire R., *Sur la théorie des ensembles.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXIX (1899), pagine 946-949.

8. Bassi A., *Studio sulle funzioni di genere qualunque e in particolare sulle funzioni di genere zero e di genere uno.* Giorn. di mat., T. XXXVI (1898), pag. 100-144; T. XXXVII (1899), pag. 326-366.

9. — *Sulle radici della derivata di una funzione olomorfa di genere qualunque.* Rend. dell'Ist. Lomb., S. II, T. XXIII (1895), pagine 1119-1123.

10. — *Sulle radici della derivata di una funzione olomorfa di genere zero ed uno.* Rend. dell'Ist. Lomb., S. II, T. XXIII (1895), pagine 979-985.

11. Betti E., *La teorica delle funzioni ellittiche e sue applicazioni.* Annali di mat., T. III (1860), pag. 65-159, 298-310; T. IV (1861), pag. 26-45, 57-70, 297-336.

12. Bianchi L., *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche.* 2 vol. Pisa, 1898-99 (lit.). — Lo stesso, 1 vol. Pisa, 1901.

13. Biermann O., *Elemente der höheren Mathematik.* Leipzig, 1895.

14. — *Theorie der analytischen Functionen.* Leipzig, 1887.

15. Borel É., *Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions*

entières. C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXII (1896), pag. 1045-1048.

16. Borel É., *Leçons sur la théorie des fonctions.* Paris, 1898.
17. — *Leçons sur les fonctions entières.* Paris, 1900.
18. — *Sur la généralisation du prolongement analytique.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXX (1900), pag. 1115-1118.
19. — *Sur la recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXVII (1898), pag. 1001-1003.
20. — *Sur le prolongement des fonctions analytiques.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXVIII (1899), pag. 283-284.
21. — *Sur les développements des fonctions uniformes en séries de Taylor.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXVII (1898), pag. 751.
22. — *Sur les séries de fractions rationnelles.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXX (1900), pagine 1061-1064.
23. — *Sur les séries de Taylor.* Acta math., Tomo XXI (1897), pag. 243-247.
24. — *Sur les séries de Taylor.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXIII (1896), pag. 1051-1052.
25. — *Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure.* Journ. de math., S. V, T. II (1896), pag. 441-451.
26. — *Sur les singularités des séries de Taylor.* Bull. de la Soc. math. de France, T. XXVI (1898), pag. 238-249.

27. Borel É., *Sur les types de croissance et sur les fonctions entières.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXVI (1898), pag. 321-324.

28. — *Sur l'extension aux fonctions entières d'une propriété importante des polynômes.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXIII (1896), pagine 556-557.

29. — *Sur les zéros des fonctions entières.* Acta math., T. XX (1897), pag. 357-396.

30. — *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* Ann. sc. de l'Éc. Norm. Sup., S. III, T. XII (1895), pag. 9-55.

31. — *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXVIII (1894), pag. 340-342.

32. Bucca F., *Sopra certi integrali e certi sviluppi in serie.* Rend. del Circ. mat. di Palermo, T. XII (1898), pag. 260-277.

33. — *Sullo sviluppo d'una funzione uniforme di variabile complessa, dotata di singolarità isolate, in serie colle caratteristiche separate.* Rend. del Circ. mat. di Palermo, T. XI (1897), pag. 90-103.

34. Casorati F., *Aggiunte a recenti lavori dei signori Weierstrass e Mittag-Leffler sulle funzioni di una variabile complessa.* Annali di mat., S. II, T. X (1882), pag. 261-278.

35. Cazzaniga T., *Funzioni olomorfe nel campo ellittico.* Atti dell'Acc. di Torino, T. XXXIII (1898), pag. 808-823.

36. Cazzaniga T., *Sulle funzioni olomorfe e meromorfe nel campo razionale e nel campo ellittico.* Atti dell'Acc. di Torino, T. XXXIII (1898), pag. 983-1002.

37. — *Sul teorema di Weierstrass nel campo ellittico.* Rend. dell'Ist. Lomb., S. II, Tomo XXXI (1898), pag. 1065-1071.

38. Cayley A., *Note on lacunary functions.* Quart. journ., T. XXVI (1893), pag. 279-281.

39. Cesàro E., *Remarques sur les fonctions holomorphes.* Giorn. di mat., T. XXII (1884), pag. 192-201.

40. — *Sur les fonctions holomorphes de genre quelconque.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. IC (1884), pag. 26-27.

41. — *Sur un théorème de M. Laguerre.* Nouv. Annales de math., S. III, T. IV (1885), pag. 321-327.

42. Cousin P., *Sur les fonctions d'une variable complexe admettant des singularités de nature quelconque.* Annales de la Fac. des Sc. de Grenoble, T. VII (1895), pag. 225-238.

43. Desaint L., *Sur les fonctions entières.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXX (1895), pag. 548-550.

44. — *Sur les propriétés des fonctions entières.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXIV (1897), pag. 746-747.

44 *bis.* — *Sur les séries de Taylor et les étoiles correspondantes.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXXII (1901), pag. 1102-1105.

45. Desaint L., *Sur les zéros de certaines fonctions analytiques.* Compt. Rend. de l'Ac. de Paris, T. CXXIV (1897), pag. 276-279.

46. — *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* Ann. sc. de l'Éc. Norm. Sup., S. III, T. XIV (1897), pag. 311-378.

47. Dini U., *Alcuni teoremi sulle funzioni di una variabile complessa.* Collectanea math. in memoriam Dominici Chelini, Milano, 1881, pag. 258-276.

48. Fabry E., *Généralisation du prolongement analytique d'une fonction.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXVIII (1899), pag. 78-80.

49. — *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux.* Ann. sc. de l'Éc. Norm. Sup., S. III, T. XIII (1896), pag. 367-399.

50. — *Sur les points singuliers d'une série de Taylor.* Journ. de math., S. V, Tomo IV (1898), pag. 317-358.

51. — *Sur les séries de Taylor.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXIV (1897), pag. 142-143; T. CXXV (1897), pag. 1086-1089.

52. — *Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers.* Acta math., Tomo XXII (1898), pag. 65-88.

53. Farkas J., *Sur les fonctions uniformes.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. XCVI (1883), pagine 1646-1647.

54. Forsyth A. R., *Theory of the functions of a complex variable.* Cambridge, 1893.

55. Fredholm J., *Om en speciell klass af singulära linier.* Oefversigt af K. Svenska Vet.-Ak. Förh., 1890, pag. 131-134.

56. Frenzel C., *Die Darstellung der eindeutigen analytischen Functionen durch unendliche Producte und Partialbruchreihen.* Zeitschr. für Math. u. Ph., Tomo XXIV (1879), pagine 316-343.

57. Gazzaniga P., *Espressione di funzioni intere che in posti dati arbitrariamente prendono valori prestabiliti.* Annali di mat., S. II, T. X (1882), pag. 279-290.

58. Gillet J., *Sur les fonctions à espaces lacunaires.* El progreso matemático, T. III (1893), pag. 139-141.

59. Goursat É., *Sur la théorie des fonctions uniformes.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. XCVI (1883), pag. 565-568.

60. — *Sur le prolongement analytique.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXVIII (1899), pagine 591-593.

61. — *Sur les fonctions à espaces lacunaires.* Bull. des sc. math., S. II, T. XI (1887), pag. 109-114.

62. — *Sur les fonctions présentant des lacunes.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. XCIV (1882), pag. 715-718.

63. — *Sur une fonction à espace lacunaire.* Bull.

des sc. math., S. II, T. XVII (1893), pagine 247-248.

64. HADAMARD J., *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor.* Journ. de math., S. IV, T. VIII (1892), pag. 101-186.

65. — *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann.* Journ. de math., Serie IV, T. IX (1893), pag. 171-215.

66. — *Sur la recherche des discontinuités polaires.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CVIII (1889), pag. 722-724.

67. — *Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CVI (1888), pag. 259-262.

68. — *Sur les fonctions entières.* Bull. de la Soc. math. de France, T. XXVI (1896), pagine 186-187.

69. — *Sur les fonctions entières (Extrait d'une lettre adressée à M. Picard).* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXII (1896), pag. 1257-1258.

70. — *Sur les séries entières.* Séances de la Soc. de sc. ph. et nat. de Bordeaux, 1896-97, pag. 110-112.

71. — *Théorème sur les séries entières.* Acta math., T. XXII (1898), pag. 55-63.

72. — *Théorème sur les séries entières.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXIV (1897), pag. 492.

73. Harkness J., Morley F., *Introduction to a theory of analytic functions.* London, 1898.
74. Hermite C., *Cours.* Paris, varie ediz. (lit.).
75. — *Remarque.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. IC (1884), pag. 27.
76. — *Sur quelques points de la théorie des fonctions. Extrait d'une lettre à M. Mittag-Leffler.* Acta Societatis Scientiarum Fennicae, T. XII (1883), pag. 67-94; Journ. für die reine und ang. Math., T. XCI (1881), pag. 54-78.
77. — *Sur une application du théorème de M. Mittag-Leffler dans la théorie des fonctions.* Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Tomo XII (1883), pag. 425-436.
78. Hilbert D., *Ueber die Entwickelung einer beliebigen analytischen Function einer Variabeln in eine unendliche, nach ganzen rationalen Functionen fortschreitende Reihe.* Nachr. der Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1897, pag. 63-70.
79. Hoelder O., *Beweis des Satzes, dass jede eindeutige analytische Function in unendlicher Nähe einer wesentlichen singulären Stelle jedem Werth beliebig nahe kommt.* Math. Ann., T. XX (1882), pag. 138-143.
80. Homén T., *Analytisk framställning af nagra lakunära funktioner.* Acta Societatis Scientiarum Fennicae, T. XII (1883), pag. 445-464.

81. Hurwitz A., *Sur un théorème de M. Hadamard.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXVIII (1899), pag. 350-353.

82. — *Ueber die Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Functionen in neuerer Zeit.* Verh. des ersten internation. Math.-Kongr. in Zürich, Leipzig, 1898, pagine 91-112.

83. Jensen J. L. W. V., *Bemärkninger til Opgave 459 og dens Losning.* Tidsskrift for Math., S. V, T. I (1884), pag. 31-32.

84. — *Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions.* Acta math., T. XXII (1899), pag. 359-364.

85. Koenig J., *Ueber eine Eigenschaft der Potenzreihen.* Math. Ann., T. XXIII (1884), pagine 447-450.

86. Krause M., *Partialbruchzerlegung bei transcendenten Funktionen.* Sitzungsb. der naturw. Ges. Isis in Dresden, 1898, pag. 10-11.

87. Krygowski Z., *Przyczynek do teoryi funkcyi o obszarach osobliwych.* Prace mat.-fiz., T. IX (1898), pag. 213-221.

88. — *Sur les fonctions à espaces lacunaires.* Bull. de la Soc. math. de France, T. XXV (1897), pag. 240-243.

89. — *Z teoryi funkcyi analitycznych.* Wiadomos'ci mat., T. III (1899), pag. 147-154.

90. Laguerre E., *Sur la détermination du genre d'une fonction transcendante entière.* C. R.

de l'Ac. de Paris, T. XCIV (1882), pagine 635-638; Oeuvres, T. I, Paris, 1898, pag. 171-173.

91. LAGUERRE E., *Sur la théorie des équations numériques.* Journ. de math., S. III, T. IX (1883), pag. 99-146; Oeuvres, T. I, pag. 3-47.

92. — *Sur le genre de quelques fonctions entières.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. XCVIII (1884), pag. 79-81; Oeuvres, T. I, pag. 178-180.

93. — *Sur les fonctions du genre zéro et du genre un.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. XCV (1882), pag. 828-831; Oeuvres, T. I, pagine 174-177.

94. — *Sur quelques équations transcendantes.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. XCIV (1882), pagine 160-163; Oeuvres, T. I, pag. 167-170.

95. LEAU L., *Extension d'un théorème de M. Hadamard à l'étude des séries de Taylor.* Bull. de la Soc. math. de France, Tomo XXVI (1898), pag. 267-271.

95 *bis.* — *Représentation des fonctions par des séries de polynômes.* Bull. de la Soc. math. de France, T. XXVII (1899), pag. 194-200.

96. — *Sur le cercle de convergence des séries.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXVII (1898), pag. 711-712.

97. — *Sur les fonctions définies par un développement de Taylor.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXVIII (1899), pag. 804-805.

98. — *Sur les points singuliers situés sur le cercle*

de convergence et sur la sommation des séries divergentes. C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXVII (1898), pag. 607-609.

99. Lecornu L., *Sur les séries entières.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CIV (1887), pag. 349-352.

100. Lerch M., *Note sur les expressions qui, dans diverses parties du plan, répresentent des fonctions distinctes.* Bull. des sc. math., S. II, T. X (1886), pag. 45-49.

101. — *Remarques sur quelques points de la théorie élémentaire des fonctions.* Sitzungsb. d. K. Böhmischen Ges. der Wiss., 1885, pagine 404-414.

102. — *Sur une classe de fonctions à espace lacunaire.* Jornal de sciencias math., T. X (1890), pag. 27-28.

103. — *Ueber die analytische Natur einer von P. du Bois-Reymond betrachteten Function.* Monatshefte für Math., T. VIII (1897), pagine 377-382; trad. franc. in Acta math., T. XXII (1899), pag. 371-377.

104. — *Ueber Functionen mit beschränktem Existenzbereiche.* Abh. d. K. Böhmischen Ges. d. Wiss., S. VII, T. II (1888).

105. — *Un thèorème de la théorie des séries.* Acta math., T. X (1887), pag. 87-88.

105 *bis.* Levi B., *Sulla teoria delle funzioni e degli insiemi.* Rend. dell'Acc. dei Lincei, S. V, T. IX (1900), 2° sem., pag. 72-79.

106. LINDELOEF E., *Remarques sur un principe général de la théorie des fonctions analytiques.* Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Tomo XXIV (1898).

107. — *Sur la transformation d'Euler et la détermination des points singuliers d'une fonction donnée par son développement de Taylor.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXVI (1898), pag. 632-634.

108. MARX J. C., *Over te Ontbinding in Primfuncties van geheele transcendentale Functies.* Utrecht, 1896.

109. MEYER A., *Från fysisk-matematiska föreningen i Upsala.* I. Tidsskrift for Math., S. V, T. I (1884), pag. 73-78.

109 *bis.* MITTAG-LEFFLER G., *Analytische Darstellung monogener Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.* Jahresb. der deutsch. Math.-Ver., T. IX (1900), fascic. 1°, pag. 74-77.

110. — *Démonstration du théorème de Laurent* Acta math., T. IV (1884), pag. 80-88.

111. — *Démonstration nouvelle du théorème de Laurent.* Mém. de la Soc. R. des Sc. de Liège, S. II, T. XI (1885).

112. — *En metod att analytiskt framställa en funktion af rationel karakter, huilken blir oändlig alltid och endast uti vissa föreskrifna oändlighetspunkter, huilkas konstanter äro på förhand angifna.* Oefv. af

K. Svenska Vet.-Ak. Förh., T. XXXIII (1876), N. 6, pag. 3-16.

113. MITTAG-LEFFLER G., *Ett nytt bevis för Laurents theorem.* Oefv. af K. Svenska Vet.-Ak. Förh., Tomo XL (1883), N. 9, pag. 5-13.

114. — *Extrait d'une lettre à M. Hermite.* Bull. des sc. math., S. II, T. III (1879), pag. 269-278.

115. — *Fullständig analytisk framställning af hvarje entydig monogen funktion, hvars singulära ställen utgöra en värdemängd af första slaget.* Oefv. af K. Svenska Vet.-Ak. Förh., T. XXXIX (1882), N. 2, pag. 11-45.

116. — *Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion.* Oefv. af K. Svenska Vet.-Ak. Förh., T. LV (1898), pagine 247-262, 263-282, 375-385.

117. — *Om den analytiska framställningen af en entydig monogen funktion, hvilken uti omgifningen af hvarje punkt som är belägen innanföre en viss cirkelperiferi, endast har ett ändligt antal singulära ställen.* Oefv. af K. Svenka Vet.-Ak. Förh., Tomo XXXIX (1882), N. 4, pag. 21-25.

118. — *Om den analytiska framställningen af en funktion af rationel karakter med en godtyckligt vald gränspunkt.* Oefv. af K. Svenska Vet.-Ak. Förh., T. XXXIV (1877), N. 1, pag. 33-43.

119. — *Om den analytiska framställningen af*

en funktion af rationel karakter med ett ändligt antal godtyckligt föreskrifna gränspunkter. Oefv. af K. Svenska Vet.-Ak. Förh., T. XXXIV (1877), N. 2, pag. 31-41.

120. Mittag-Leffler G., *Om en generalisering af potensserien.* Oefv. af K. Svenska Vet.-Ak. Förh., T. LV (1898), pag. 135-138.

120 *bis.* — *On the analytical representation of a uniform branch of a monogenic function.* Trans. of the Cambridge phil. Soc., T. XVIII (1900).

121. — *Sulla rappresentazione analitica di un ramo uniforme di una funzione monogena.* Atti dell'Acc. di Torino, T. XXXIV (1899), pag. 481-491.

122. — *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante.* Acta math., T. IV (1884), pag. 1-79.

123. — *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène.* Acta math., T. XXIII (1900), pag. 43-62; T. XXIV (1901), pag. 183-204, 205-244.

124. — *Sur la représentation d'une branche uniforme d'une fonction analytique.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXVIII (1899), pagine 1212-1215.

125. — *Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. XCIV (1882), pag. 414-416, 511-514, 713-

715, 781-783, 938-941, 1040-1042, 1105-1108, 1163-1166; T. XCV (1882), pag. 335-336.

125 *bis.* — *Sur une formule de M. Fredholm.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXXII (1901), pag. 751-753.

126. — *Sur une transcendante remarquable découverte par M. Fredholm.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CX (1890), pag. 627-629.

127. — *Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm. Extrait d'une lettre à M. Poincaré.* Acta math., T. XV (1891), pag. 279-280.

128. — *Ytterligare om den analytiska framställningen af funktioner af rationel karakter.* Oefv. af K. Svenska Vet.-Ak. Förh., Tomo XXXIV (1877), N. 1, pag. 17-32.

Molk J. Vedi Tannery.

Morley F. Vedi Harkness.

129. Osgood W. F., *Note on the generalisation of Poincaré's and Goursat's proofs of a theorem of Weierstrass's.* Bull. of the American Math. Soc., S. II, T. V (1898), pagine 14-17.

130. — *Selected topics in the general theory of functions.* Bull. of the Am. Math. Soc., S. II, T. V (1898), pag. 59-87.

131. Painlevé P., *Sur la représentation des fonctions analytiques uniformes.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXVI (1898), pag. 200-202.

132. — *Sur le développement des fonctions uni-*

formes ou holomorphes dans un domaine quelconque. C. R. de l'Ac. de Paris, Tomo CXXVI (1898), pag. 318-321.

133. PAINLEVÉ P., *Sur le développement d'une branche uniforme de fonction analytique en série de polynômes.* C. R. de l'Ac. de Paris, Tomo CXXIX (1899), pag. 27-31.

134. — *Sur le développement d'une branche uniforme d'une fonction analytique.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXVIII (1899), pagine 1277-1280.

135. — *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques.* Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse, T. II (1888).

136. — *Sur les singularités des fonctions analytiques et, en particulier, des fonctions définies par les équations différentielles.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXXI (1900), pag. 489-492.

137. PASCAL E., *Funzioni olomorfe nel campo ellittico (estensione di un celebre teorema di Weierstrass).* Rend. dell'Acc. dei Lincei, S. V, T. V (1896), 1° sem., pag. 319-323.

138. PETERSEN J., *Quelques remarques sur les fonctions entières.* Acta math., T. XXIII (1900), pag. 85-90.

139. — *Vorlesungen über Functionstheorie.* Kopenhagen, 1898.

140. PHRAGMÉN E., *Sur une extension d'un théorème de M. Mittag-Leffler.* C. R. de l'Ac.

de Paris, T. CXXVIII (1899), pag. 1434-1437.

141. Picard É., *Mémoire sur les fonctions entières.* Ann. sc. de l'Éc. Norm. Sup., S. II, T. IX (1880), pag. 145-166.

142. — *Quelques remarques sur le prolongement des fonctions.* C. R. de l'Ac. de Paris, Tomo CXXVIII (1899), pag. 193-195.

143. — *Remarques sur la communication de M. Borel.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXII (1896), pag. 1048.

144. — *Sur la décomposition en facteurs primaires des fonctions uniformes ayant une ligne de points singuliers essentiels.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. XCII (1881), pag. 690-692.

145. — *Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. LXXXIX (1879), pag. 745-747.

146. — *Sur les fonctions entières.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. LXXXIX (1879), pag. 662-665.

147. — *Sur une propriété des fonctions entières.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. LXXXVIII (1879), pag. 1024-1027.

148. Pincherle S., *A proposito di un recente teorema del sig. Hadamard.* Rend. dell'Acc. di Bologna, Nuova Serie, T. III (1898-99), pag. 67-74.

149. — *Costruzione di nuove espressioni analiti-*

che atte a rappresentare funzioni con un numero infinito di punti singolari. Rend. dell'Acc. dei Lincei, S. IV, T. III (1887), 1° sem., pag. 370-375.

150. PINCHERLE S., *Di alcune operazioni atte ad aggiungere o togliere singolarità in una funzione analitica.* Annali di mat., S. III, T. IV (1900), pag. 219-280.

151. — *Lezioni sulla teoria delle funzioni.* Bologna, 1893 (lit.).

152. — *Relazioni fra i coefficienti e le radici di una funzione intera trascendente.* Rendic. dell'Ist. Lomb., S. II, T. XI (1878), pagine 391-398.

153. — *Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del prof. C. Weierstrass.* Giorn. di mat., T. XVIII (1880), pag. 178-254, 317-357.

154. — *Sopra un'applicazione delle funzioni sferiche al teorema di Mittag-Leffler e alla determinazione delle funzioni a spazi lacunari.* Rend. dell'Acc. di Bologna, 1882-83, pag. 100-105.

155. — *Sul confronto delle singolarità delle funzioni analitiche.* Rend. dell' Acc. di Bologna, Nuova Serie, T. II (1897-98), pag. 77-88.

156. — *Sul confronto delle singolarità di due funzioni analitiche.* Rend. dell'Accad. dei Lincei, S. IV, T. III (1887), 2° sem., pagine 310-315.

157. Pincherle S., *Sulle serie di potenze (Estratto d'una lettera al dott. Vivanti).* Annali di mat., S. II, T. XXI (1893), pag. 138-140.

158. — *Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date.* Rend. dell'Acc. dei Lincei, S. V, T. VIII (1899), 1° sem., pag. 228-232.

159. Pizzarello D., *Sulle funzioni trascendenti intere.* Messina, 1900.

160. Poincaré H., *Sur les fonctions à espaces lacunaires.* Acta Societatis Scientiarum Fennicae, T. XII (1883), pag. 341-350.

161. — *Sur les fonctions à espaces lacunaires.* American Journ., T. XIV (1892), pag. 201-221.

162. — *Sur les fonctions entières.* Bull. de la Soc. math. de France, T. XI (1883), pagine 136-144.

163. — *Sur les transcendantes entières.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. XCV (1882), pag. 23-26.

164. Pringsheim A., *Erwiderung gegen Hrn. Lerch.* Monatshefte für Math., T. IX (1898), pag. 46.

165. — *Ueber das Verhalten gewissen Potenzreihen auf dem Convergenzkreise.* Math. Ann., T. XXV (1885), pag. 419-426.

166. — *Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise.* Sitzungsb. der Ak. zu München, T. XXX (1900), pag. 37-100.

167. Pringsheim A., *Ueber die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen.* Sitzungsb. d. Ak. zu München, Tomo XXV (1895), pag. 75-92.

168. — *Ueber eine besondere Gattung von singulären Stellen analytischer Functionen.* Math. Ann., T. L (1898), pag. 442-461.

169. — *Ueber Functionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylor'sche Reihenentwickelung besitzen.* Math. Ann., T. XLIV (1894), pag. 41-56.

170. — *Ueber gewisse Reihen, welche in getrennten Convergenzgebieten verschiedene, willkürlich vorgeschriebene Functionen darstellen.* Math. Ann., T. XXII (1883), pag. 109-116.

171. — *Ueber Potenzreihen auf dem Convergenzkreise und Fourier'sche Reihen.* Sitzungsb. d. Ak. zu München, T. XXV (1895), pagine 337-364.

172. — *Ueber Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Functionen.* Math. Ann., T. XLVII (1896), pag. 121-154.

173. — *Zur Geschichte des Taylor'schen Lehrsatzes.* Bibl. math., S. III, T. I (1900), pagine 433-479.

174. — *Zur Theorie der synektischen Functionen.* Sitzungsb. d. Ak. zu München, T. XXVI (1896), pag. 167-182.

175. Pringsheim A., *Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich.* Math. Ann., T. XLII (1893), pag. 153-184.

176. — *Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich.* Sitzungsb. d. Ak. zu München, T. XXII (1892), pag. 211-245.

177. Puzyna (von) J., *Teorya funkcyi analitycznych.* I. Lemberg, 1898.

178. — *Ueber den Laguerre'schen Rang einer eindeutigen analytischen Function mit unendlich vielen Nullstellen.* Monatshefte für Math., T. III (1892), pag. 1-15.

179. Roy (le) E., *Sur les points singuliers d'une fonction définie par un développement de Taylor.* C. R. de l'Acad. de Paris, Tomo CXXVII (1898), pag. 948-950.

180. — *Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor.* C. R. de l'Ac. de Paris, Tomo CXXVII (1898), pag. 654-657; T. CXXVIII (1899), pag. 492-495.

181. Runge C., *Zur Theorie der analytischen Functionen.* Acta math., T. VI (1885), pagine 245-248.

182. — *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen.* Acta math., T. VI (1885), pagine 229-244.

183. SCHAPER (VON). H., *Ueber die Theorie der Hadamard'schen Functionen und ihre Anwendung auf das Problem der Primzahlen.* Göttingen, 1898.

184. SCHEEFFER L., *Beweis des Laurent'schen Satzes.* Acta math., T. IV (1884), pag. 375-380.

185. SCHERING E., *Das Anschliessen einer Function an algebraische Functionen in unendlich vielen Stellen.* Abh. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, T. XXVII (1880).

186. SCHOENFLIES A., *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.* Jahresbericht der deutsch. Math.-Ver., T. VIII (1900), fasc. 2°, pag. 1-251.

187. SCHOU E., *Bevis for en Sätning af Hadamard.* Nyt Tidsskrift for Math., T. VIII B (1897), pag. 5-6.

188. — *Sur la théorie des fonctions entières.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXV (1897), pagine 763-764.

189. SERVANT M., *Sur les points singuliers d'une fonction définie par une série de Taylor.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CXXVIII (1899), pag. 80-83.

190. SPARRE (DE) M. L. M., *Sur la détermination du genre d'une fonction holomorphe dans quelques cas particuliers.* C. R. de l'Ac. de Paris, T. CII (1886), pag. 740-743.

191. STAECKEL P., *Ueber arithmetische Eigen-*

schaften analytischer Functionen. Math. Ann., T. XLVI (1895), pag. 513-520; trad. franc. in Nouv. Ann., S. III, T. XVIII (1899), pag. 53-64.

192. Staeckel P., *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen.* Journ. für reine und ang. Math., T. CXII (1893), pag. 262-264.

193. Stieltjes T. J., *Exemple d'une fonction qui n'existe qu'à l'intérieur d'un cercle.* Bull. des sc. math., S. II, T. XI (1887), pag. 46-51.

194. Tannery J., Molk J., *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques.* T. I. Paris, 1893.

195. Teixeira F. G., *Exemples de fonctions à espaces lacunaires.* Nouv. Ann., S. III, T. VI (1887), pag. 43-45.

196. — *Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.* Bull. des sc. math., S. II, T. XVII (1893), pag. 29-32.

197. — *Sobre o desenvolvimiento das Funcções em série.* Mem. de la Ac. de Madrid, T. XVIII (1897).

198. Thomae J., *Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen.* 1ª ed., Halle, 1880; 2ª ed., Halle, 1898.

199. Thomé L. W., *Ueber Convergenz und Divergenz der Potenzreihe auf dem Convergenzkreise.* Journ. für reine und ang. Math., T. C (1887), pag. 167-178.

200. VITALI G., *Sui limiti per $n = \infty$ delle derivate n^{me} delle funzioni analitiche.* Rendic. del Circ. mat. di Palermo, T. XIV (1900), pag. 209-216.

201. — *Sulle funzioni analitiche sopra le superficie di Riemann.* Rend. del Circ. mat. di Palermo, T. XIV (1900), pag. 202-208.

202. VIVANTI G., *Alcuni teoremi sulle funzioni intere.* Giorn. di mat., T. XXII (1884), pagine 243-261, 378-380.

203. — *Lista bibliografica della teoria degli aggregati.* Bibl. math., S. III, T. I (1900), pagine 160-165.

204. — *Notice historique sur la théorie des ensembles.* Bibl. math., S. II, T. VI (1892), pag. 9-25.

205. — *Nuove ricerche sulle funzioni intere.* Giorn. di mat., T. XXVI (1888), pag. 303-314.

206. — *Osservazioni sui punti singolari essenziali.* Rend. del Circ. mat. di Palermo, Tomo III (1889), pag. 223-229.

207. — *Sul concetto di derivata nella teoria elementare delle funzioni analitiche.* Rendic. del Circ. mat. di Palermo, T. XIII (1899), pag. 263-273; trad. polacca in Wiadomości mat., T. III (1899), pag. 138-147.

208. — *Sulle funzioni intere trascendenti.* Giorn. di mat., T. XXIII (1885), pag. 96-122.

209. — *Sulle funzioni trascendenti intere.* Rend. dell'Ist. Lomb., S. II, T. XXXII (1899), pag. 569-571.

210. Vivanti G., *Sulle serie di potenze.* Riv. di mat., T. III (1893), pag. 111-114.

211. — *Sulle serie di potenze (Estratto d'una lettera al prof. S. Pincherle).* Annali di mat., S. II, T. XXI (1893), pag. 193-194.

212. — *Sulle serie di potenze i cui coefficienti dipendono da una variabile.* Annali di mat., S. II, T. XXI (1893), pag. 25-32.

213. — *Teoria degli aggregati.* Torino, 1894. — Estratto dal Formulaire de mathématiques, T. I, Turin, 1895, pag. 65-74, e dalla Riv. di mat., T. III (1893), pag. 189-192; T. IV (1894), pag. 135-140.

214. Volterra V., *Sopra alcune applicazioni della rappresentazione analitica delle funzioni del prof. Mittag-Leffler.* Atti dell'Acc. di Torino, T. XXXIV (1899), pag. 492-494.

215. Weierstrass K., *Ueber einen functionentheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler.* Monatsb. der Ak. zu Berlin, 1880, pag. 707-717; Abhandlungen aus der Functionenlehre, Berlin, 1886, pag. 53-66; trad. franc. in Bull. des sc. math., S. II, T. V (1881), pag. 113-124.

216. — *Zur Functionenlehre.* Monatsb. der Ak. zu Berlin, 1880, pag. 719-743; 1881, pagine 228-230; Abhandlungen aus der Functionenlehre, pag. 67-104; trad. franc. in Bull. des sc. math., S. II, T. V (1881), pagine 157-183.

217. WEIERSTRASS K., *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen.* Abhandlungen der Ak. zu Berlin, 1876, pag. 11-60; Abhandlungen aus der Functionenlehre, pag. 1-52; trad. franc. in Ann. sc. de l'Éc. Norm. Sup., Serie II, T. VIII (1879), pag. 111-150.

218. WITTING A., *Ueber die Lage der Verschwindungspunkte einer ganzen Function.* Zeitschr. für Math. u. Ph., T. XXX (1885), pag. 274-278.

INDICE ALFABETICO.

Pag.

Addizione (di due numeri trasfiniti) 38
Aggregato 2
" chiuso . . . 4
" concentrato . 4
" connesso . . 5
" continuo . . 5
" denso . . . 4
" derivato . . 4
" finito . . . 2
" infinito . . 2
" isolato . . . 4
" numerabile . 7
" perfetto . . 4
Ascissa (d'una stella) . 280

Campo d'esistenza (d'una funzione analitica) . 116
Campo di convergenza (d'un'espressione aritmetica) 152
Caratteristica (d'un polo) 130
" (d'un punto singolare isolato) . 141
Centro (d'una stella) . 279
Cerchio di convergenza 67

Pag.

Cerchio unità 314
Classe (di numeri trasfiniti) 42
" (d' una funzione intera) 179
Continuazione analitica 116
Corrispondenza ordinata 31

Derivata (d'una funzione analitica) . . 123
" (d'una serie di potenze) . . 93

Elemento (d'una funzione analitica) . . . 116
Equivalenza (degli aggregati) 6
Espressione aritmetica 65, 152

Fattore esponenziale esterno 179
" primo o primario 178
Figura generatrice (di una stella) 302
Funzione analitica . . 116

Pag.
Funzione continua . . 63
„ dei punti d'un campo . . . 62
„ generatrice (di una stella) . 302
„ intera od olomorfa . . . 166
„ lacunare . . 304
„ meromorfa o trascendente fratta. . 196, 246
„ monodroma o uniforme 116, 326
„ polidroma o non uniforme 116
„ regolare in un punto . . . 117
„ semplice . . 179

Genere (d'una funzione intera) 179
„ (d'un aggregato) 4

Integrale (d'una serie di potenze) 93
Intorno (d'un punto). . 1

Lacuna 304
Limite superiore e inferiore 62
Linea singolare . . . 204

Massimo e minimo . . 68
Moltiplicazione (di due numeri trasfiniti) . . 39

Pag.
Numeri di convergenza 175
Numero algebrico reale 16
Numero ordinale o trasfinito 31

Ordine apparente . 270, 273
„ (d'una radice). . 130
„ (d'un polo) . . . 129
„ reale . . . 270, 271
Oscillazione 68

Permanenza delle relazioni analitiche . . 119
Polo, punto d'infinito, punto singolare non essenziale 127
Posto-zero 130
Potenza del continuo 19, 21, 23
„ d'un aggregato 6
„ (prima) . . . 13
„ (seconda) . . . 44
Principii di formazione 41
Principio d'arresto o di limitazione 43
Punto limite 2
Punto singolare d'una funzione analitica . 117
Punto singolare d'una serie di potenze . . 114
Punto singolare essenziale 128
Punto singolare non assoluto 334

Radice 130

Pag.
Raggio di convergenza 67
Rango 179

Segmento (d'una serie ben ordinata) . . . 32
Serie ben ordinata . . 30
„ dedotta 105
„ di potenze . . . 65
„ di potenze egualmente singolari . 337
„ di Taylor . . . 104
„ esponenziale . . 101
„ *n* volte infinita . 298

Pag.
Serie ordinata 30
Sezione 304
„ artificiale . . . 323
„ naturale . . . 325
Similitudine (di due serie ben ordinate) . . 31
Specie (d'un aggregato) 4
„ (d'un numero trasfinito) 42
Stella 279

Valor medio 83

ERRATA-CORRIGE.

Pag.	linea				
63	penultima			*togli la parola:*	reale
77	5	*invece di:*	$f(x)$	*leggi:*	$P(x)$
99	6	„	ρ'	„	σ'
118	penultima	„	c'	„	c
177	penultima	„	c_{n+1}	„	$\lvert c_{n+1} \rvert$
200	6	„	$4\,A$	„	$6\,A$
201	21	„	condensato	„	denso
„	ultima	„	192	„	191
247	7	„	d_{m-k}	„	d_{m+k}
272	2	„	$e^{i\xi p1}$	„	$e^{i\xi p+1}$
275	terzultima	„	94	„	95
287	4	„	$y^{(h_1+h_2)}$	„	$y^{h_1+h_2}$
288	ultima	„	y^{n-2}	„	y_{n-2}
364	terzultima	„	191	„	192

1700 MANUALI HOEPLI

Pubblicati a tutto Aprile 1918

Che cosa sono i Manuali Hoepli?

I. — *Una raccolta iniziata e continuata col proposito di diffondere in forma piana ma esauriente le lettere, le scienze, le arti e le industrie.*

II. — *I Manuali Hoepli sono sempre compilati da specialisti per ogni materia e sempre, ove occorra, illustrati copiosamente. Con ogni nuova edizione vengono riveduti, corretti ed arricchiti delle aggiunte necessarie per tenerli al corrente dei più recenti progressi della scienza e delle industrie.*

III. — *Nella Collezione dei Manuali Hoepli ognuno può trovare un testo riguardante i suoi studi, e, se mai, rintraccerà sempre uno o più capitoli di suo interesse nei Manuali di indole affine. Testi più esaurienti di scienze pure ed applicate (non Manuali, in formato*

in-8 grande) si trovano elencati nelle pagine dell'appendice (carta colorata) unita al presente Catalogo.

IV. — *I Manuali Hoepli formano un'Enciclopedia perennemente viva di scienze, lettere ed arti, perchè la loro grande diffusione permette all'editore di rinnovarli e rifarli di continuo.*

Ulrico Hoepli

AVVERTENZE

☞ I libri si spediscono *franchi di porto* nel Regno e nelle Colonie italiane dietro invio dell'importo a mezzo di cartolina vaglia. — Per le spedizioni all'estero aggiungere il *dieci per cento in più* sul prezzo del libro.

☞ Le spedizioni sono fatte con cura e puntualità, ma i volumi non raccomandati viaggiano a *rischio* e *pericolo* del committente.

Per ricevere i libri raccomandati — **onde evitare smarrimenti dei quali l'editore non si rende responsabile** — aggiungere *centesimi 30 in più.*

☞ Si fanno anche spedizioni contro assegno (eccettuato in zona di guerra ove tali spedizioni non sono ammesse), ma siccome le spese di assegno sono ingenti, è meglio *inviare sempre* l'importo anticipato con cartolina vaglia.

I manuali Hoepli non esistono in brochure; essi sono tutti solidamente ed elegantemente legati

ELENCO COMPLETO DEI MANUALI HOEPLI

disposti in ordine alfabetico per materia

L. C.

Abbreviature latine ed italiane (Dizionario di) usato specialmente nel medio evo, di A. Cappelli, 2ª ediz., di pag. LXVIII-528 (legato in tutta pergamena 8 50

Abitazioni animali domestici di U. Barpi, 2ª ediz. p. XVI-479 e 255 figure 4 50

Abitazioni popolari (Case operaie) di E. Magrini, 2ª ediz. pag. XVI-465 e 219 incisioni 5 50

Abiti per signora. Taglio e confezione di E. Bonetti - pag. XX-296, 55 tavole (in ristampa)

Acciai (Lavor. e tempera degli). Indurimento superficiale del ferro e cementazione, di A. Massenz, 3ª ediz. riveduta, pag. XX-184 con 60 inc. 2 50

Acciai Tecnica moderna degli), di C. Goffi. Produzione, lavoraz. a caldo, trattamenti termici, lavoraz. a freddo, proprietà, impiego degli acciai al carbonio e speciali. Manuale per gli operai aggiustatori meccanici pag. XVI-260 con 88 inc. e 3 tav. a colori. 4 50

Acciaio (Tempera e cementaz. dell'), di M. Levi-Malvano, di pag. XII-261 . . . . . 4 —

Accumulatori - vedi: Correnti alternate - Illuminazione elettrica - Ingegnere elettricista - Operaio elettrotecnico - Sovratensioni - Ricettario del elettricista.

Acetilene (L') e le sue applicazioni di S. Castellani e U. Romanelli, 3ª ediz. di pag. XX-335 e 115 illustr. . 4 —

Acido solforico, nitrico, muriatico, ecc. (fabbricaz dell') di V. Vender (in ristampa).

Acquaforte (L') di F. Melis-Marini, di pag. 178, con 10 tav. e 15 prove originali 3 50

Acqua potabile (Condotture di), di P. Bresadola, di p. XVI-334 e 37 fig. (in ristampa).

Acque minerali e termali d'Italia di L. Tioli di pag. XXII-552 . . . . . 5 50

Acque minerali artificiali, acque gazose, ecc. di M. Giua, con 42 illustrazioni. . . . . 2 —

Acque sotterranee e giacimenti minerali, di M. Grossi di pag. XVI-380 con 68 incis e una tavola 4 50

Acrobatica e atletica di A. Zucca, di pag. XXX-267, 100 tav. e 42 inc. 6 50

L. C

Acustica musicale, di A. Tacchinardi, di p. XII-189, con 85 inc. 2 50

Adulterazioni del vino e dell'aceto di A. Aloi, di pag. XI-227 e 10 incis. 2 50

Aerostatica, Aeronautica, Aviazione di G. G. Bassoli, p. VIII-184 e 94 incis. (esaurito).

Affari (Vademecum dell'uomo di), di C. Dompè, 2ª ediz. di pag. 562 . . . . . 3 50

Aggiustatore meccanico, di F. Massero, di pag. XII-263 con 296 inc. 4 50

— Vedi Acciai.

Agraria — vedi: Abitazioni animali - Agricoltore - Agronomia - Alimentazione del bestiame - Ampelografia - Catasto italiano - Computisteria agraria - Economia fabbricati rurali - Estimo rurale - Geometria pratica - Legislazione rurale - Macchine agricole - Mezzeria - Pomologia - Telemetria - Triangolazioni topografiche e catastali.

Agricoltore (Prontuario dell') e dell'Ingegnere agronomo, di V. Niccoli, 6ª ediz., p. XL-588 (in ristampa).

Agricoltore (Il libro dell'). Agronomia agricoltura, di A. Bruttini, 3ª ediz., di p. XXIII-464 con 313 figure 3 50

Agrimensura (Elementi di) di S. Ferreri-Mitoldi, 2ª edizione, di pag. XVIII-324, con 240 incisioni . . 3 50

Agronomia di Carega di Muricce, 3ª ed. (esaurito).

Agronomia e agricoltura moderna di G. Soldani, 3ª ediz., di p. VIII-416 (in ristampa).

Agricoltura — vedi: Botanica - Chimica agraria - Coltivazione piante tessili - Coltura montana - Concimi - Elettricità (L') nella vegetazione - Floricoltura - Frumento e mais - Frutta minori - Frutticoltura - Funghi e tartufi - Gelsicoltura - Giardiniere - Insetti nocivi - Insetti utili - Malattie crittogamiche delle piante erbacee coltivate - Molini - Olivo ed olio - Olii vegetali, animali e minerali - Orticoltura - Piante e fiori - Piante industriali - Pomologia artificiale - Prato - Prodotti agricoli del Tropico - Selvicoltura - Tabacco - Uva passa - Viticoltura.

Agrumicoltura in Italia (L') **e nella Libia,** di E. Ferrari, di pag. XIV-228, con 35 tavole . . . 3 50

Albanese parlato. Cenni grammaticali e vocabolario, proverbi, dialoghi, di A. Leotti, di p. 433 . . 4 50

Alcool. Fabbricazione e materie prime, di F. Cantamessa, 2ª ediz., di p. XII-447 . . . . . 4 —

Alcool industriale, di G. Ciapetti. Produzione e applicazione, p. XII-262 e 105 figure . . . . 3 —

Alcoolismo (L') di G. Allevi, di p. XI-221 . . . 2 —

Algebra complementare di S. Pincherle, 2 vol.

I. **Analisi algebrica,** 3ª ediz. di p. VIII-174 con 8 inc. 1 50

II. **Teoria delle equazioni,** 3ª ediz., p. IV-167 e 4 inc. 1 50

Algebra elementare di S. Pincherle, 12ª ediz. di p. VIII-210 . . . . . 1 50

— (Esercizi di) di S. Pincherle, 2ª ediz., p. VIII-135 . . 1 50

Alimentazione di G. Strafforello, di p. VIII-122 . 2 —

Alimentazione del bestiame di Menozzi e Niccoli 2ª ediz. p. XVI-407 . . . . . 4 —

L. C.

Alligazione (Tavole di) per l'oro e l'argento di F. Buttari, p. XII-220 . . . . . 2 50

Alluminio (L') di C Formenti, di p. XXVIII-324 . 3 50

Alpi (Le) di I. Ball, traduz. di I. Cremona, p. VI-120 1 —

Alpinismo di G. Brocherel, di p. VIII-312 . . 3 —

Amatore (L') di oggetti d'arte e di curiosità di L. De Mauri, 2ª ediz., di p. XV-720, (in ristampa)

Amatore (L') di majoliche e porcellane di L. De Mauri 2ª ediz. di pag. XVI 843 con 430 incisioni e 43 tavole . 12 50

Amatore (L') di miniature in avorio. (Secoli 17, 18, 19). di p. 560, con 22 illustrazioni nel testo e 62 fuori testo delle quali 23 a colori 18 50

Amministrazioni comunali, provinciali e opere pie, pei Segretari e aspiranti Segretari comunali di E. Mariani, di p. XXXII-979, legato in pelle. 9 50

Ampelografia. Viti per uve da vino e da tavola, di G. Molon, p. XLIV-1243, 2 vol. . . . . 18 —

Analisi chimica qualitativa di sostanze minerali e organiche, di P. E. Alessandri, 3ª ediz. rifatta di pag. XVI-470 con 55 incis. e 63 tavole. 5 50

Analisi chimica qualitativa (Tabelle di) di F. P. Treadwell. Ediz. ital. con un compendio di ricerche sulla purezza de reattivi ed un cenno sulle soluzioni titolate, per cur di G. Panizzon, di pag. VII-238 . . 5 50

Analisi chimica quantitativa ponderale e volumetrica, di P. E. Alessandri. 2ª edizione, di pag. XX-662 con 73 incisioni. . 6 50

Analisi chimiche per Ingegneri di L. Medri, di p. XIV-313 e 80 figure 3 50

Analisi delle urine (L'urina nella diagnosi delle malattie), di F. Jorio (in ristampa).
— vedi - Urologia.

Analisi del vino, di M. Barth e E. Comboni, 2ª ed., di p. XVI-140 . . . . . 2 —

Anatomia e fisiologia comparate di R. Besta, p. VII-229 e 59 incis. . . . . 1 —

Anatomia microscopica, di D. Carazzi, di p. XI-211, con 5 incis. 1 50

Anatomia pittorica, di A. Lombardini, 4ª ediz. a cura di V. Lombardini (in ristampa).

Anatomia topografica di C. Falcone, 3ª ediz., di p. XII-837 e 48 fig. . . . . 9 —

Anatomia vegetale di A. Tognini, di p. XVI-724 . 3 —

Anfibii d'Italia (Gli), di C. Vandoni, di pag. XII-176, con 32 figure 2 50

Animali da cortile. Polli, Tacchini, Fagiani, Oche, Conigli, ecc., di F. Faelli, 2ª ediz., di pag. XXIV-338, con 56 incisioni e 19 tavole colorate 5 50
— — vedi: Colombi domestici - Coniglicoltura - Fagiani Malattie dei polli - Pollicoltura - Uccelli canori.
Animali domestici. — vedi: Abitazione degli - Cammello - Cane - Cani e gatti - Cavallo - Maiale - Porco - Razze bovine - Suinicoltura - Zebra.

Animali parassiti dell'uomo di F. Mercanti, di p. IV-179, con 33 incis. 1 50
— Vedi: Insetti delle case.

L. c.

Antichità greche, pubbliche, sacre e private, di V. INAMA, 2ª ediz. di p. XV-224 e 19 tav. . 2 50

Antichità private dei romani, di N. MORESCHI e W. KOPP, di p. XVI-181. illustr. . . . 1 50

Antichità pubbliche romane, di I. G. HUBERT e W. KOPP, di p. XIV-324 . . . . . 3 —

Antologia provenzale, di E. PORTAL, di p. VIII-674 4 50

Antologia stenografica, di E. MOLINA, (esaurito)

Antropologia, di S. SERGI, in sostituzione del manuale esaurito, di G. CANESTRINI (in corso di stampa).

Antropologia criminale, di G. ANTONINI, di pagine VIII-167 . . . . . 2 —

Antropometria, di R. LIVI, di p. VIII-237 e 32 incis. 2 50

Ape latina. Dizionario di frasi, sentenze ecc., cura di G. FUMAGALLI, p. XVI-353 . . . . . 3 50

Apicoltura, di G. CANESTRINI, 8ª ediz. ampliata, a cura di V. ASPRÈA, pag. VIII-239, con 55 inc. 2 50

Appalti di opere pubbliche, di A. CUNEO, di pag. VIII-571 . . . . . 5 —

Apparecchiatura dei tessuti di lana, di G. STROBINO, di pag. VIII-618, con 404 incisioni. . . 8 50

Apprendista meccanico, di V. GOFFI, di pagine XVI-315, con 203 incisioni . . . . . 3 —

Arabo parlato in Egitto. Grammatica e vocabolario, di A. NALLINO, 2ª ediz., di pag. XXVI-531 . . 7 50

Arabo parlato in Libia. Grammatica e repertorio di vocaboli e frasi di E. GRIFFINI, di pag. LII-378 . 5 —

— vedi: Grammatica Italo-Arabo.

Araldica (Grammatica), di F. TRIBOLATI. 4ª edizione a cura G. CROLLALANZA (in ristampa).

— vedi: Vocabolario Araldico.

Araldica zootecnica di E. CANEVAZZI, di p. XIX-342 e 43 incis.. . . . . 3 50

Arazzo (L'arte dell') (Gobelins) di G. B. ROSSI, di p. XV-239 e 130 illustr. . . . . 5 —

Archeologia e storia dell'Arte greca di I. GENTILE, 3ª ediz. rifatta da S. Ricci, (esaurito).

Archeologia — vedi: Atene - Antichità greche - Antichità romane - Epigrafia - Paleografia - Rovine Palatino - Topografia di Roma.

Architettura italiana antica e moderna, di A. MELANI. 5ª ediz., di p. XXXII-688, con 180 tavole . 12 —

— vedi: Stili architettonici.

Archivista (L'), di P. TADDEI, Man. teorico pratico, di p. VIII-486 . . . . . 5 —

Archivisti (Manuale per gli), di P. PECCHIAI, di pagine VI-229 . . . . . 3 —

Argentatura — vedi: Enciclopedia galvanica - Galvanizzazione - Galvanoplastica - Galvanostegia - Metallocromie - Metalli preziosi - Piccole industrie - Ricettario dell'elettricista.

Argentina (Repubblica), storia e condizioni geografiche di E. COLOMBO, di p. XII-380 . . . . 3 50

L. C.

Aritmetica pratica, di F. PANIZZA, 2ª ediz., di p. VIII-188. . . . . 1 50

Aritmetica razionale, di F. PANIZZA, 6ª ediz., di p. XII-210 . . . . . 1 50

— (Esercizi di) F. PANIZZA, di pag. VIII-150 . . . 1 50

Aritmetica e geometria dell'operaio, di E. GIORLI. 5ª ed., p. XII-239, 79 inc., 136 esere, 150 probl. 2 50

Armi antiche (Guida del raccoglitore) di I. GELLI di p. VIII-389, 23 tav. e 432 incis. 6 50

Armonia, di G. BERNARDI, 2ª ediz., di pag. XX-338 . 3 50

Aromatici e nervini nell'alimentazione, di A. VALENTI, di p. XV-338 . . . . . 3 —

Arsenico (L') nella scienza e nell'industria, di L. MAURANTONIO, di p. XII-256 . . . . . 2 50

Arte decorativa antica e moderna, di A. MELANI, 2ª ediz. di p. XXVII-551, 88 incis. e 175 tav. . 12 —

Arte del dire (Retorica) di D. FERRARI, 9ª ediz. di p. XVI-340 . . . . . 1 50

Arte della memoria. Storia e teoria di B. PLEBANI, 2ª ediz., di pag. XXVI-235 con 13 illustrazioni. . . 2 50

Arte nei mestieri di I. ANDREANI, in 3 volumi.

I. Il falegname, 2ª ed. di p. 309, 264 incis. e 25 tav. 3 —
II. Il fabbro, di p. VIII-250, con 266 incis. e 50 tav. 3 —
III. Il muratore, 2ª ediz. di p. VIII-273, con 235 incis. 3 —

Arti grafiche fotomeccaniche, di P. CONTER. 4ª ediz., di p. XII-228, 43 incis. e 8 tav. 3 50

Asfalto (Fabbricazione e applicazione), di E. RIGHETTI, di p. VIII-152 e 22 incis. (in ristampa).

Assicurazione (Manuale di), di G. ROCCA, p. XIX-634 5 50

Assicurazione in generale, di U. GOBBI, di pagine XII-308 . . . . . 3 —

Assicurazioni sulla vita, di C. PAGANI, di pagine VI-161 . . . . . 1 50

Assicurazioni e stima danni aziende rurali di A. CAPILUPI, di p. VIII-284 e 17 incis. . . 2 50

— vedi: Matematica attuariale - Patologia infortuni lavoro - Scienza attuariale.

Assistenza e terapia degli ammalati di mente, di M. U. MASINI e G. VIDONI, di p. VIII-233 2 50

Assistenza infermi, di C. CALLIANO, 2ª ediz., di p. XXIV-r48 e 7 tav. (esaurito).

Assistenza degli infermi — vedi: Epidemie esotiche - Malattie infanzia - Malattie dei lavoratori - Malat. paesi caldi - Medicatura antisettica - Medicina sociale - Medicina d'urgenza - Medico pratico - Rimedi - Soccorsi d'urgenza - Tisi - Tisici e sanatori - Tubercolosi.

Assistenza dei pazzi, di A. PIERACCINI, e pref. di E. Morselli, 2ª ediz., p. XX-279 . . . . . 2 50

Astronomia, di J. N. LOCKYER e G. CELORIA. 5ª ed., di p. XVI-275 e 54 incis. 1 50

Astronomia nautica, di G. NACCARI, 2ª ediz., di p. XVI-348 e 48 fig. 3 50

L. C.

Astronomia antico testamento, di G. V. SCHIAPARELLI, di p. 204 . . . . . 1 50

Atene antica e moderna. Cenni, di S. AMBRROSOLI, di p. LV-170, e 22 tavole 3 50

Atlante geografico storico d'Italia, di G. GAROLLO, p. VIII-67 e 24 tav. . . . . 2 —

Atlante geografico universale di R. KIEPERT e testo di G. Garollo, di p. VIII-88 e 27 carte. 11ª ed 2 50

Attrezzatura navale, di F. IMPERATO, 2 volumi:
I. Attrezzatura navale, 6ª ediz. di pag. 570, con 423 fig. nel testo 5 50
II. Manovra delle navi a vela e a vapore, segnalazioni marittime, 5ª di pag. XX-904. 294 inc. e 29 tav. 8 50

Autocromista (L'). Fotografia a colori, di L. PELLERANO, di pag. XXXII-544 con 75 fig. e 38 tavole . 12 —

Autografi (L'Amatore di) di E. BUDAN, p. XIV-426 e 361 facsimili 4 50

Autografi (Raccolte e raccoglitori di), di C. VANBIANCHI, di p. XVI-376 e 102 tav. 6 50

Automobilista (Man. del) a guida pei meccanici conduttori d'automobili, di G. PEDRETTI, 5ª ediz. di pag. XXXII-1072 con 895 illustrazioni. 14 50

Automobili — vedi: Caldaie a vapore - Chauffeur - Ciclista - Locomobili - Motociclista - Trazione a vapore.

Avarie e sinistri marittimi, Manuale del liquidatore di V. ROSSETTO, p. XV-496 e 23 fig. . . 5 50

Aviazione (Aeroplani, Idrovolanti, Eliche) di E. GARUFFA, di pag. 650, con 548 figure 9 50

Avicoltura — vedi: Animali da cortile - Colombi - Faggiani - Malattie dei polli - Ornitologia - Pollicoltura Uccelli canori - Uovo di gallina.

Bachi da seta, di F. NENCI, 4ª ed. (in ristampa).

Balbuzie. Cura dei difetti d. pronuncia di A. SALA, di p. VIII-214 . . . . . 2 —

allo (Il). *I balli di jeri,* di I. GAVINA. 3ª edizione riveduta da G. FRANCESCHINI, di pag. VIII 253 con 103 fig. 2 50

Ballo (Il). *I balli d'oggi,* di F. GIOVANNINI di p. VIII-183. 3 50

Bambini — vedi: Balbuzie - Malattie d'infanzia - Nutrizione del bambino - Ortofrenia - Rachitide.

Bandiere, insegne e distintivi dei principali Stati del Mondo, di F. IMPERATO, di pagine XVI-220, con 50 tavole a colori 5 50

Barbabietola da zucchero. Storia, lavorazione, ecc., di A. SIGNA p. XII-225 e 29 fig. 2 50

Barbabietola da zucchero. Coltivazione di B. R. DEBARBIERI, p. XVI-220 e 12 fig. 2 50

Batteriologia. G. CANESTRINI. 2ª ed., (esaurito).

Beneficenza (Manuale della), di L. CASTIGLIONI e G ROTA, di p. XVI-340 . . . . . 3 50

Bestiame e agricoltura in Italia, di F. ALBERTI. 2ª ed. di U. BARPI p. XII-322, 47 tav. e 118 fig. 4 50

L. c.

Bestiame — vedi ai singoli titoli: Abitazioni di animali - Alimentazione del bestiame - Araldica zootecnica - Cammello - Cavallo - Coniglicoltura - Igiene veterinaria Majale - Malattie infettive - Polizia sanitaria - Polli oltura - Razze bovine - Suinicoltura - Veterinario Zebre - Zoonosi - Zootecnia.

Biancheria. Disegno, taglio e confezione di E. BONETTI. 4ª ediz.. di p. XX-269 e 71 tav. . . . . 5 —

Bibbia (Manuale della), di G. ZAMPINI, 2ª ediz. di pagine XX-312 . . . . . 3 —

Bibliografia. G. FUMAGALLI 3ª ed. interamente rifatta di pag. 360, con 87 fig. 4 50

Bibliotecario (Man. del), di G. PETZHOLDT, traduzione di G. Biagi e G. Fumagalli, (esaurito).

Biliardo (Il) **e il giuoco delle bocce,** di I. GELLI, 3ª edizione, di pag. XII-197 e 80 illustrazioni. . . 2 50

Biografia — vedi: C. Colombo - Dantologia - Dizionario di botanica - Dizionario biografico - Manzoni - Napoleone I - Omero - Shakespeare.

Biologia animale, di G. COLLAMARINI, di p. X-42 e 25 tav. . . . . 3 —

Biologia marina, di R. ISSEL, di p. 627, con 211. fig. 10 —

Birra, fabbricazione, ecc., di S. RASIO e F. SAMARANI di p. 279 e 25 fig. 3 50

Bonificazioni. Amministrazioni, ecc., di G. MEZZANOTTE, p. XII-294 . . . . . 3 —

Bonificazioni (La pratica delle), di A. FANTI, di pagine XX-368, con 75 inc. . . . . 4 —

Borsa e valori pubblici, di E. BONARDI di pagine XXVI-916 . . . . . 7 50

Boschi e pascoli. Storia, importanza idro-geologica, ecc., di E. FERRARI, di pag. 380, con 15 tavole . . 3 50

Botanica, di I. D. HOOKER-PEDICINO N., 5ª ediz. a cura G. Gola. di p. XVI-144 e 74 fig. 1 50

Botanica — vedi ai singoli titoli: Ampelografia - Anatomia vegetale - Barbabietola - Caffè - Dizionario di botanica - Fisiologia vegetale - Floricoltura - Funghi Jucca - Garofano - Giardiniere - Malattie crittogamiche - Orchidee - Orticoltura - Piante e fiori - Piante erbacee a seme oleoso - Piante industriali - Pomologia - Prodotti del tropico - Rose - Selvicoltura - Uve - Tabacco.

Bottaio (Il). Fabbricazione e misura delle botti, di L. PAVONE, riveduto da A. Strucchi, di p. 240, con 127 fig. 3 —

Boyscout — vedi Scoutismo.

Bromatologia. I cibi dell'uomo, di S. BELLOTTI, di p. XV-251 . . . . . 3 50

Buddismo, di E. PAVOLINI, di p. XVI-164 (esaurito).

Cacciatore (Manuale del), di G. FRANCESCHI, 5 ediz., aumentata, di p. XVI-489 con 83 inc. e tavole schem. 5 50

Caffè. Suo paese e importanza, di B. BELLI, di p. XXIV-395 e 48 tav. 4 50

Caffettiere e sorbettiere, di L. MANETTI, di pagine XII-311 e 65 fig. (in ristampa).

L. c.

Calcestruzzo (Costruzioni in) ed in cemento armato, di G. VACCHELLI, 5ª ediz., di p. XIX-387 e 274 fig. . . 4 50

Calci e cementi, di L. MAZZOCCHI. 4ª ediz., di pagine XII-256 e 64 fig. 2 50

Calcolazioni mercantili e bancarie — vedi: Affari - Calcoli fatti - Commerciante - Computisteria - Contabilità - Interesse e sconto - Prontuario del ragioniere - Monete inglesi - Ragioneria - Usi mercantili - Valori pubblici.

Calcoli fatti. 90 tabelle di calcoli fatti di E. QUAIO. 2ª ediz. di p. XII-342 . . . . . 4 50

Calcolo dei canali in terra e in muratura, di C. Sandri, di p. VIII-305 . . . . . 4 50

Calcolo infinitesimale, di E. PASCAL:
I. Calcolo differenz., 4ª ediz. 4 50
II. Calcolo integrale, 3ª ediz., (in ristampa).
III. Calcolo delle variazioni e delle diff. finite, 2ª ediz. di pag. XII-325 . . . . . 4 50

Esercizi critici di calcolo differenziale e integrale, di E. PASCAL, di p. XVI-275 . . . . . 3 —

Calcolo infinitesimale — vedi ai singoli titoli: Determinanti - Funzioni analitiche - Funzioni ellittiche - Gruppi di trasformazione - Matematiche superiori.

Caldaie a vapore e istruzione ai conduttori, di L. CEI, 3ª ediz. di p. XVI-474 e 282 fig. . . . . 4 —

Calderaio pratico e costruttore di caldaie a vapore, di G. BELLUOMINI. 2ª ediz., di p. XII-248, con 220 inc. 3 —

Calligrafia. Cenni storici e insegnamento di R. PERCOSSI, 2ª ediz., di p. XII-151 (esaurito).

Calore, di E. JONES, trad. Fornari, p. 304 e 98 fig. . 3 —

Camera di Consiglio Civile, di A. FORMENTANO, di p. XXXII-574 . . . . . 4 50

Cammello (Il) di E. PLASSIO, di pag. XII-303 con 2 tav. 3 —

Campicello scolastico (Il). Agricoltura pratica pei maestri di AZIMONTI e CAMPI; di p. 186 e 126 incis. . 1 50

Candele (L'industria delle). Estrazione e purificazione della Glicerina, del Dott. V. SCANSETTI di p. 450 c. 98 inc. 6 —

Cane (Il), razze, allevamento, ecc., di A. VECCHIO, 3ª ed. con appendice " Le malattie dei cani " di P. A. PESCE, di p. XX-521 e 168 incisioni nero e colori . . 8 50

Cani e gatti, costumi e razze, di F. FAELLI, di p. XX-429 e 153 fig. 5 50

Canottaggio, del Cap. G. CROPPI, di p. XXIV-456, 387 incis. e 91 tavole 7 50

Cantiniere (Il) Man. di vinificazione di A. STRUCCHI. 4ª ediz., di p. XII-260 e 62 incis. (esaurito).

Canto (Il) nel suo meccanismo, di P. GUETTA, di p. VIII-253 e 24 incis. (in ristampa).

Canto (Arte e tecnica del), di G. MAGRINI, 2ª ed. di p. 166 3 50

Canto gregoriano, di A. OTTOLENGHI, di p. XVI-1 9 2 —

L. C.

Caoutchouc e guttaperca, di L. SETTIMI, di pagine XVI-253 e 14 ill. . . . . 3 —

Capitano marittimo (Il) di G. ALBI, di p. XXIV-665 con 13 fig., 2 quadri fuori testo, 16 tav. a colori e un Dizionario commerciale marittimo in 5 lingue . . 8 50

Capomastro (Man. del). Impiego di materiali idraulici-cementizi, di G. RIZZI, 3ª ediz., di pag. XVI-433, e 32 incisioni nel testo 3 50

Capomastro (Il) **pratico,** G. VIVARELLI (in lavoro).

Capo-meccanico (Il) Nuovo trattato di meccanica industriale, di S. DINARO, di pag. 783 con 136 figure . 6 50

Capocellaio, di L. RAMENZONI, di p. XII 222 e 68 incis. 2 50

Carboni fossili inglesi, Coke, Agglomerati, di G. GHERARDI, di p. XII-586 e 5 carte geog. (esaurito).

Carni conservate col freddo artificiale, di U. FERRETTI, di p. XVI-499 e 83 fig. . . . . 5 —

Carta (Industria della), di L. SARTORI, di p. 329 e 106 inc. 7 50

Carte fotografiche. Preparazioni, ecc. di L. SASSI, p. XII-353 (esaurito).

Carte magiche (Le), Giuochi di destrezza, di PH. DE-FRANK, di pag. XII-148 con 36 illustrazioni . . 2 50

Cartografia. Teoria e storia di E. GELCICH, di p. VI-257, con 36 fig. (esaurito).

Cartografia — vedi ai singoli titoli: Catasto - Celerimensura - Compensazione errori - Disegno topografico - Estimo - Lettura delle carte - Telemetria - Topografia - Triangolazioni

Casa dell'avvenire (La). Vade-mecum dei costruttori, ecc. di A. PEDRINI, 2ª ed. di p. XVII-917 e 445 fig. 9 50

Casaro (Man. del), di L. MORELLI. Fabbricazione del burro e del formaggio di p. XII-258 (in ristampa).

Case operaie — vedi: Abitazioni popolari - Casa dell'avvenire - Casette popolari - Città moderna - Fabbricati civili - Progettista moderno.

Caseificio, di G. FASCETTI, storia e teoria della lavorazione del latte, di p. XX-550 (in ristampa).

Casette popolari, villini economici e abitazioni rurali, di I. CASALI 4ª ediz., di pag. VIII-508 con 570 fig. 7 50

Catasto italiano, di E. BRUNI (in ristampa).

Catrame (il) e suoi derivati di G. MALATESTA, di pag. 628, con 80 fig. 7 50

Cavalli (L'arte di guidarli) di C. VOLPINI, di pagine XXIV-216 e 100 illustrazioni 4 50

Cavallo (il), di C. VOLPINI, 5ª ediz., di p. XX-543, con 93 fig. e 43 tav. a cura di A. GIANOLI 7 50

— Proverbi sul) raccolti da C. VOLPINI, di p. XIX-172 . 2 50

Cavi telegrafici sottomarini, di E. JONA, di p. XVI-338 e 188 fig. 5 50

Celerimensura e tav. logarit. di F. BORLETTI. 2ª edizione, di pag. XVI-298 e 30 incisioni . . . . 4 —

Celerimensura (Tavole di) di G. ORLANDI, di p. 1200 18 —

Cellulosa, celluloide, ecc., di G. MALATESTA, di pag. VIII-176 . . . . . 2 —

Cemento armato — vedi: Calcestruzzo - Calci e cementi - Capomastro - Mattoni - Vocabol. tecnico vol. VIII.

L. C.

Centrali elettriche — vedi: Correnti alternate - Elettrotecnica - Illuminaz. elettrica - Ingegn. elettricista.

Ceramiche — vedi: Prodotti ceramici - Maioliche e Porcellane - Fotosmaltografia applicata alle.

Cere — vedi: Imitazioni e succedanei - Industria stearica - Materie grasse - Merceologia tecnica - Ricettario industriale

Chauffeur (Guida del) e conducente d'automobili, e di motori d'aviazione di G. PEDRETTI 4ª edizione di pagine 980 con 905 illustraz., (in ristampa).

Chauffeur di se stesso. man. pratico ad uso di chi guida la propria automobile senza chauffeur, di G. PEDRETTI 2ª ediz. di pag. 495, con 336 fi . e 12 tavole . 8 —

Chimica, di H. E. ROSCOE, 7ª ediz. a cura E. Ricci, di pag. VIII-238 (esaurito).

Chimica (Storia della) di E. MEYER. Ediz. ital. a cura dei Dott. U. e C. GIUA e pref. I. GUTRESCHI, di pagine XXVIII-721 7 50

Chimica agraria, di A. ADUCCO, 3ª ediz. di pag. 572 4 —

Chimica agraria — vedi: Adulterazione vino - Alcool - Birra - Casaro - Caseificio - Cognac - Densità dei mosti - Distillazione vinacce - Enologia - Fecola - Fermentazione e fermenti - Fosfati - Humus - Liquorista - Malattie vini - Terreno agrario - Zucchero.

Chimica analitica. di W OSTWALD, trad. di A. Bolis, 2ª edizione, di pag. XVI-296 . . . . . 2 50

Chimica applicata alla igiene — vedi: Analisi chimica qualitativa - Bromatologia - Chimica clinica - Chimica legale - Chimica delle sostanze alimentari - Disinfezioni - Elettrochimica - Farmacista - Igienista - Reattivi e reaz. - Spettrofotometria - Urina - Urologia - Veleni.

Chimica applicata alle industrie — vedi: Acido solforico - Alcool industriale - Alluminio - Analisi volumetrica - Birra - Chimica sostanze alimentari, coloranti - Chimico - Conservazione prodotti, sostanze - Colori e vernici - Distillazione legno - Enologia - Esplodenti - Gas illuminante - Industria della carta, frigorifera, saponiera, stearica. tartarica, tintoria - Metallocromia - Merceologia - Pirotecnia - Prodotti e procedimenti - Ricettario domestico, dell'elettricista, industriale - Sale e saline - Soda caustica - Specchi - Tintore - Vetro - Zolfo - Zucchero.

Chimica clinica, di R. SUPINO (in ristampa).

Chimica fotografica, di R. NAMIAS, 2ª ediz. . . 5 50

Chimica legale (Tossicologia), di N. VALENTINI, di p. XII-243 . . . . . 2 50

Chimica delle sostanze alimentari, ad uso dei Medici, dei Farmacisti, ecc., di P. E. ALESSANDRI. 2ª ediz. di p. XV-627, due tav. e 149 incis. . 5 50

Chimica delle sostanze coloranti. (Tintura d. fibbre tessili di A. PELLIZZA, di p. VIII-480 . . 5 50

Chimico (Man del) e dell'Industriale di L. GABBA, 5ª ediz. colle tavole di H Will di pag. XXIV-588 . . 6 50 6 50

Chiromanzia e tatuaggio, di G. L. CERCHIARI, di p. XX-232 e 60 ill 4 50

L. C.

Chirurgia operativa, di R. STECCHI e A. GARDINI, di p. VIII-322, con 118 inc. . . . . 3 —

Chitarra (Studio della), di A. PISANI, di p. XVI-138, 52 fig. e 27 esempi . . . . . 2 —

Cibi — vedi: Aromatici - Bromatologia - Carni conservate - Conservazione sostanze alim. - Macelli moderni - Gastronomo moderno - Pane - Pasticciere - Pastificio - Patate - Tartufi e funghi.

Ciclista (Manuale del), di U. GRIONI, 3ª ediz., di p. XVI-496, 285 incis. e 8 tav. . . . . 5 —

Cinematografia (Guida pratica della) di V. MARIANI, di pag. XXIII-312, con 151 illustraz. . . . . 4 —

Città moderna, (La), ad uso degli ingegneri, di A. PEDRINI, di p. XX-510, 194 fig. e 10 tav. . . . . 5 —

Città (Costruzione delle) di A. CACCIA, di pag. 299 con 270 incisioni 4 50

Classificazione delle scienze, di C. TRIVERO, di p. XVI-292 . . . . . 3 —

Climatologia, di L. DE MARCHI, di p. X-294 e 6 carte 1 50

Codice del bollo. Testo unico commentato da E. CORSI, di p. C-564 . . . . . 4 50

Codice cavalleresco italiano, di J. GELLI, 12ª ediz. di pag. 336 . . . . . 3 50

Codice civile del Regno, riscontrato e coordinato da L. FRANCHI, 6ª ediz. con appendice, p. 243 . . 1 50

Codice di commercio, riscontrato da L. FRANCHI, 6ª ediz. di p. 208 . . . . . 1 50

Codice doganale italiano, commentato da E. BRUNI, di p. XX-1078 . . . . . 6 50

Codice dell'Ingegnere Civile, Industriale, Navale, Elettrotecnico, di E. NOSEDA, 2ª edizione rifatta, di pag. XXIV-1005 . . . . . 9 50

Codice nuovo del lavoro. Manuale di legislazione sociale, di E. NOSEDA, di pag. XXIII-605 . . . . 6 50

Codice di marina mercantile, 4ª ediz a cura di L. FRANCHI, di p. IV-290 . . . . . 1 50

Codice penale e nuovo codice di procedura penale, a cura di L. FRANCHI, 4ª ediz., di p. IV-209 1 50

Codice penale per l'esercito e penale militare marittimo per L. FRANCHI, 5ª ediz. colle disposizioni emanate per la Guerra di p. 290 . . . . . 4 50

Codice del perito misuratore, di L. MAZZOCCHI e E. MARZORATI, 3ª ediz., di p. VIII-582 e 18 ill. . . 5 50

Codice di procedura civile, riscontrato da L. FRANCHI, 3 ediz., di p. 181 . . . . . 1 50

Codice del teatro, di N. TABANELLI, di p. XVI-338 3 —

Codici (I cinque) del Regno d'Italia (Civile - Procedura civile - Commercio - Penale e nuovo Codice di Procedura penale), edizione Vade-mecum, a cura di L. FRANCHI, 6ª ediz., di pag. 902, legatura imitaz. pelle . 6 50

Codici e leggi usuali d'Italia, riscontrati sul testo ufficiale e coordinati e annotati da L. FRANCHI, raccolti in sette grossi volumi legati in pell .

L. C

Vol. I. Codici — Codice civile - di procedura civile - di commercio - penale - procedura penale - della marina mercantile - penale per l'esercito - penale militare marittimo *(otto codici)* 4ª ed. (in prepar.)

Vol. II. Leggi usuali d'Italia. Raccolta coordinata di tutte le leggi speciali più importanti e di più ricorrente ed estesa applicazione in Italia; decreti regolamenti, ecc. Parte I. Dalla voce "Abbordi di mare, alla voce "Croce rossa". 3ª ediz. di pag. XII-1320 . 12 50

— **Parte II.** Dalla voce "Dazio consumo, alla voce "Mutuo soccorso, 3ª ediz. pagine 1321 a 2744 . . . 12 50

— **Parte III.** Dalla voce "Navigazione interna, alla voce "Stazzatura, pag 2725 a 3605 . . . . . 12 50

— **Parte IV.** Dalla voce "Strade ferrate, a fine (in corso di stampa).

— **Appendice** alla 2ª ediz. Le leggi dal 15 maggio 1905 al 1° gennaio 1911, di p. 1910 a due colonne, legatura in tutta pelle 10 50

Vol. III. Leggi e convenzioni sui diritti d'autore, raccolta generale delle leggi italiane e straniere di tutti i trattati e le convenzioni esistenti fra l'Italia ed altri Stati. 2ª ediz. di p. VIII-617 . . . . . 6 50

Vol. IV. Leggi e convenzioni sulle privative industriali. Disegni e modelli di fabbrica. Marchi di fabbrica e di commercio. Legislazione italiana e straniera. Convenzioni fra l'Italia ed altri Stati, di pagine VIII-1007 . . . . . 6 50

Cognac. Spirito di vino e distillazione delle fecce e d. vinacce, di DAL PIAZ-PRATO. 2ª ediz. a cura di A. F. Sannino, di p. XII-210, con 38 incis. . . . . 2 —

Coleotteri italiani, di A. GRIFFINI, di p. XVI-334 e 215 incis. . . . . 3 —

Collaudazione di materiali, di V. GOFFI, di p. XV-260, 25 incis. e 8 tav. 3 50

Colle animali e vegetali, gelatine e fosfati d'ossa, di A. ARCHETTI, di p. XVI-195 . . . . . 2 50

Colombi domestici e colombicoltura, di P. BONIZZI, 3ª ediz., di p. X-212 e 26 fig. . . . . 2 —

Colonie. Manuale coloniale, di P. REVELLI, pubblicato per cura della Società di Esplorazioni Geografiche di Milano, di pag. XII-240. . . . . 3 50

Colonie. Elenco delle località abitate nelle Colonie italiane, di C. TRIVERIO, di pag. IV-66 con 4 carte geogr. 1 50

Colori (La scienza dei) e la pittura, di L. GUAITA, 2ª ediz., di p. IV-368 . . . . . 8 —

Colori e vernici, ad uso dei pittori di M. MEYER e P. BONOMI DA-PONTE. 5ª ediz. del Man. GORINI-APPIANI di pag. XVI-308 con 39 incisioni . . . . 8 —

Colori e vernici (Industria dei). Materie prime, fabbricazione, applicazioni, di E. RIZZINI, di pag. XVI-564, con 142 fig. e 10 tav. 6 50

Coltivazione industriale delle piante aromatiche e medicinali di C. CRAVERI, di pagine XXIX-307 - 75 incisioni e 24 tavole a colori . 8 50

L. C.

Coltura montana, di G. SPAMPANI, di p. VIII-424 e 171 incis. 4 50

Commerciante (Manuale del), di C. DOMPÉ, 4ª ediz. di p. 768 . . . . . 8 50

Commercio (Storia del) di R. LARICE, 2ª ed., p. XII-293 3 —

Commercio — vedi ai singoli titoli: Affari - Codice di comm., doganale - Corrispondenza - Geografia economica, commerciale - Produzione e commercio vino - Scritture affari - Storia del Comm. - Usi mercantili.

Commissario giudiziale — vedi: Curatore dei fallimenti.

Compensazione degli errori e rilievi geodetici, di F. CROTTI, di p. IV-160 . . . . 2 —

Composizione delle tinte nella pittura a olio e ad acquerello, di G. RONCHETTI, di pagine VIII-186 . . . . . 2 —

Computisteria, di V. GITTI: Vol. I. Computisteria commerciale, 9ª ediz. di p. 224 . . . . . 1 50

– Vol II. Computisteria finanziaria, 6ª ediz., p. VIII-157 1 50

Computisteria agraria, L. PETRI, (in ristampa).

Concia delle pelli. L'Arte del conciatore, del calzolaio e del pellicciaio, di G. VENTUROLI. 4ª ediz., del Manuale di G. GORINI, di pag. XVI-206. . . . . 2 50

Concia e tintura delle pelli, di V. CASABURI, di pag 445 e XXX tabelle . . . . . 6 —

Conciatore (Manuale del) di A. GANSSER, di pagine XXIV-382 con 22 incisioni e 2 tavole. 4 50

Conciliatore (L'ufficio di Conciliazione) di C. CAPALOZZA. di p. XLIII-461, con 144 formule di atti . . 4 50

Concimi, di A. FUNARO, 3ª ediz. di p. VIII-306 . . 2 50

Condottura d'acqua potabile, di P. BRESADOLA, di p. XV-334, con 37 fig. 3 50

Congelamenti. Patogenesi e cura del Maggiore Medico P. CASALI e Capitano Medico F. PULLÈ, con prefazione Prof. LUIGI DEVOTO, di pag. XVI-365, con 117 illustrazioni 6 50

Conifere (Le), **da rimboschimento,** di C. CRAVERI, di pag. XII-322, con 85 figure . . . . . 4 —

Coniglicoltura pratica, di G. LICCIARDELLI 5ª ediz., di pag. XX-321, 116 fig. e 12 tavole (in ristampa).

Conservazione delle sostanze alimentari, di G. GORINI, 4ª ediz. a cura Franceschi e Venturoli di p. VIII-231 . . . . . 2 —

Conservazione prodotti agrari, di C. MANICARDI, di p. XV-220 . . . . . 2 50

Conserve alimentari (L'industria delle) di G. D'ONOFRIO, di pag. XX-654, con 165 incisioni . . 5 50

Consigli pratici — vedi: Assistenza infermi - Caffettiere - Infortuni lavoro - Liquorista - Medicina d'urgenza - Pasticciere e confettiere - Ricett. domestico - Ricett. d. elettricista - Ricett. fotografico - Ricett. industriale - Ricettario industrie tessili - Ricettario di metallurgia - Soccorsi d'urgenza - Special. medicinali.

Consoli, Consolati e Diritto consolare, di M. ARDUINO, di p. XV-277 . . . . . 3 —

Consorzi difesa del suolo. Idraulica, rimboschimento, di A. RABBENO, di p. VIII-296 . . . . 3 —

Contabilità aziende rurali, di A. DE BRUN, di p. XIV-539 . . . . . 4 50

L. C.

Contabilità bancaria, di A. Falco, di pag. XII-289 4 50

Contabilità comunale, di A. De Brun, 2ª ediz., di p. XVI-650 (esaurito).

Contabilità domestica per le famiglie e le scuole, di O. Bergamaschi — vedi Ragioneria domestica.

Contabilità e amministrazione imprese elettrotecniche, di F. Miola, di p. XVI-262 . 3 —

Contabilità generale dello Stato, di E. Bruni 4ª ediz., di p. XVI-457 . . . . . 3 —

Contabilità — vedi: Computisteria commerciale, Finanziaria, Agraria - Contabilità comunale, domestica - Contabilità generale dello Stato - Interessi e sconti - Logismografia - Paga giornaliera - Ragioneria - Ragioneria delle Cooperative, Industriale, pubblica - Scritture d'affari - Società di mutuo soccorso.

Contrappunto, di G. Bernardi, (in ristampa).

Contratti e collaudi di lavori edili, di F. Andreani, di pag. XVI-355. . . . . 3 50

Conversazione italiana neo-ellenica, di E. Brighenti, di p. XII-143 . . . . . 2 —

Conversazione italiana-tedesca, di A. Fiori e G. Cattaneo. 9ª ediz., di p. VIII-484 . . . . . 3 50

Conversazione francese-italiana, di E. Baroschi-Soresini, 2ª ediz., di p. XV-288 . . . . 2 50

Cooperative rurali, di V. Niccoli. 2ª ediz., di pagine VIII-394 . . . . . 3 50

Cooperazione nella sociologia e nella legislazione, di P. Virgilii, di p. XII-228 . . . 1 50

Corano (Il). Versione letterale italiana, di A. Fracassi di pag. LXIV-463 . . . . . 5 —

Corano. Testo arabo e versione letterale italiana a fronte, di A. Fracassi, di pag. LXX-700 . . . 9 50

Correnti elettriche alternate, ecc., di A. Marro, 3ª ediz., di pag. XLVIII-862, 379 inc. e 81 tab. 10 50

Corrispondenza bancaria, di A. Falco, di pagine VIII-338 . . . . . 3 —

Corrispondenza commerciale poliglotta, Italiana, Francese, Tedesca, Inglese, Spagnuola e Portoghese, di G. Frisoni, in sei parti

I. Parte italiana, 5ª ediz., p. XX-520 (in ristampa).
II. „ spagnuola, 2ª ediz., di pag. XXIV-515 . . 5 —
III. „ francese, 3ª ediz., p. XX 449 . . 4 —
IV. „ inglese, di p. XVI-448 (in ristampa).
V. „ tedesca, 2ª ediz., di pag. XX-512 . . . 4 —
VI. „ portoghese di pag. XVI-511 . . . . 5 —

Corrispondenza telefonica. Norme di servizio, ecc., di O. Perdomini, di p. XII-375 . . . . 3 50

Corse. Dizionario delle voci più in uso, di G. Franceschi, di p. XII-305 . . . . . 2 50

Corti d'Assise. Guida dei dibattimenti, di C. Baldi, di p. XX-401 . . . . . 3 50

Cosmografia, (Lezioni di) di G. Boccardi (in sostituzione del Manuale del La Leta), di pag. XII-233, con 20 inc. e 2 tav. . . . . 3 —

L. C.

Costruttore navale, di G. Rossi, 2ª ediz. rifatta, di pag. XVI-817, con 674 figure 8 50

Costruzioni — vedi: Abitazioni - Appalti - Architettura - Calcestruzzo - Calci - Capomastro - Casa dell'avvenire - Casette popolari - Città (La) moderna - Codice dell'ingegnere - Contratti e collaudi - Costruzioni enotecniche, lesionate, metalliche, rurali - Fabbricati civili - Fabbricati rurali - Fognatura - Fondazioni terrestri e idrauliche - Imitazioni - Ingegn. civile - Ingegn. costrutt. meccanico - Lavori marittimi - Laterizi - Mattoni e pietre - Muratore - Peso metalli - Progettista moderno - Prontuario agricoltore ingeg. rurale - Resistenza dei materiali - Resist. e pesi di travi metalliche - Riscaldamento - Stime di lavori edili.

Costruzioni in cemento armato, di G. Baluffi, di pag. XII-271, con 85 illustr. . . . . 3 —

Costruzioni enotecniche, di S. Mondini, di p. IV-251, con 53 incis. . . . . 3 —

Costruzioni lesionate. Cause e rimedi di I. Andreani, di pag. XII-243 con 122 incisioni . . . 3 50

Costruzioni metalliche, di G. Pizzamiglio, di p. L-947, con 1643 incis. e 52 tav. . . . . 22 —

Costruzioni rurali in cemento armato, di A. Fanti, 2ª ediz. completamente rifatta, di pag. XVI-315, con 160 inc. 4 50

Cotone (Guida per la coltivazione del), di C. Tropea, p. X-165 e 21 incis. 2 50

Crestomazia neo-ellenica, di E. Brighenti, di p. XVI-405 . . . . . 4 20

Cristallografia, di F. Sansoni, (esaurito, 2ª ediz. rifatta da C. Viola, in lavoro).

Cristoforo Colombo, di V. Bellio, p. IV-136, 10 fig. 1 50

Crittografia diplomatica e commerciale, di L. Gioppi, di p. 177 . . . . . 3 50

Cronologia e calendario perpetuo, di A. Cappelli, di p. XXXIII-421 . . . . . 6 50

Cronologia delle scoperte e delle esplorazioni geografiche, di L. Hugues, di p. VIII-487 5 50

Cronologia e storia medioevale e moderna, di V Casagrandi, 3ª ediz. di pag. 262 . . . . . 1 50

Cubatura dei legnami rotondi e squadrati, di G. Belluomini, 11ª ediz., di p. VI-229 . . . 3 —

Cultura e vita greca (Disegno storico della), di D. Bassi ed E. Martini, di p. XVI-791, 107 fig. e 13 tav. 7 50

Cuore (Il). Suoi mali e sue cure, di G. Fornaseri, di pag. XII-421, con 99 figure 5 50

Cuore (Terapia fisica del) di L. Minervini, di p. XII-475 5 50

Curatore di fallimenti (Manuale del) e del Commissario Giudiziale, di L. Molina (2ª ediz. di p. LX-892 8 50

Curve circolari e raccordi. Tracciamento delle curve, di C. Ferrario, (in ristampa).

Curve graduate e raccordi pei tracciamenti ferroviari, di C. Ferrario, di p. XX-251 e 41 fig. 3 50

L. c.

Curve. Tracciamento delle ferrovie e strade, di G. H. A. Kröhner, trad. di L. Loria 3ª ediz. p. VIII-167 . 2 50

Dama (Il giuoco della) all'italiana, di L. Avigliano, di pag. 287, con 200 diagrammi e 2 tavole . . . 5 50

Dantologia. Vita e opere di Dante, di G. A. Scartazzini, 3ª ediz. a cura N. Scarano, di p. XVI-424 . 3 —

Dattilografia. Manuale teorico pratico di scrittura a macchina, di I. Saulle, di pag. XII-225, con 50 inc. . 3 —

Dazi doganali del Regno d'Italia (Tariffa dei) al 1° maggio 1909, di G. Maddalena, di p. 152 . . 1 50

Debito pubblico italiano, E. Bruni, di p. XII-444. 3 50

Determinanti e applicazioni, di E. Pascal, di p. VII-330 . . . . . 3 —

Diabete mellito e sua cura di A. Rodella, 2ª edizione di pag. XVI-204 . . . . . 2 50

Dialetti italici, grammatica, ecc. di O. Nazari, di p. XVI-364 (vedi anche **Italia dialettale** a pag. 31) 3 —

Dialetti letterari greci, di G. Bonino, di pagine XXXII-214 . . . . . 1 50

Didattica per le scuole normali, di G. Soli (2ª ediz. in lavoro).

Dinamica elementare, di G. Cattaneo, di p. VIII-146 1 50

Dinamometri. Misura delle forze e loro azione lungo determinate trajettorie, di L. Campazzi, di p. XX-273 e 132 inc. . . . . 3 —

Diplomazia e agenti diplomatici, di M. Arduino, di p. XII-269 . . . . 3 —

Diritti d'autore - vedi: Codici e leggi, Vol. III (pag. 14).

Diritti e doveri dei cittadini, ad uso delle scuole di D. Maffioli, 14ª edizione, di p. XVI-230 . . 1 50

Diritto amministrativo e cenni di Diritto costituzionale, di G. Loris, 9ª ed. di p. XXIII-461 3 —

Diritto amministrativo — vedi: Beneficenza - Catasto - Codice doganale - Esattore comunale - Giustizia amministrativa - Imposte dirette - Legge sanità - Legislazione sanitaria - Morte vera - Municipalizzazione servizi - Polizia sanitaria - Ricchezza mobile.

Diritto civile. Compendio di G. Loris, 7ª ed., p. XX-400 3 —

Diritto civile — vedi: Camera di Consiglio - Codice civile - Codice procedura civile - Codice dell'Ingegnere - Conciliatore - Diritti e doveri - Diritto italiano - Espropriazione - Ipoteche - Lavoro donne - Legge infortuni lavoro - Legge lavori pubblici - Legge registro e bollo - Legislazione acque - Legislazione rurale - Notaio - Prontuario legislativo - Proprietario di case - Storia del diritto - Testamenti.

Diritto commerciale italiano, di E. Vidari, 4ª ediz. di p. X-448 . . . . . 3 —

Diritto costituzionale, di F. P. Contuzzi, 3ª ediz., p. XIX-456 (esaurito).

Diritto ecclesiastico, di G. Olmo, 2ª ed., pag. XVI-433 3 —

Diritto internazionale penale di S. Adinolfi, di pag. VIII-258 . . . . . 1 50

Diritto internazionale privato, di F. P. Contuzzi 2ª ediz., di p. XXXIX-626 . . . . . 4 50

L. C.

Diritto internazionale pubblico, di F. P. CONTUZZI, 2ª ediz., di p. XXXII-412 . . . . . 3 —

Diritto italiano, di G. L. ANDRICH, di p. XV-227 . 1 50

Diritto marittimo italiano, A. SISTO, pag. XII-556 3 —

Diritto penale romano, di C. FERRINI, 2ª ediz., di p. VIII-360 . . . . . 3 —

Disegnatore meccanico, di V. GOFFI. 6ª ediz., di p. XII-532 con 475 fig. 7 50

Disegno (Principî di), e gli stili dell'ornamento di C. BOITO 6ª ediz., di p. XII-182 con 61 inc. e append. di A. MELANI: L'insegnamento dell'arte decorativa di pagine 250 con 50 inc. 5 50

Disegno (Corso di), di J. ANDREANI, 3ª ediz., di p. VIII-74 e 80 tav. 3 50

Disegno (Grammatica del), di E. RONCHETTI, di p. IV-190 con 96 fig. e atlante di 106 tavole 9 50

Disegno assonometrico, di P. PAOLONI, di p. IV-122, 23 fig. e 21 tav., (in ristampa).

Disegno geometrico, di A. ANTILLI, 4ª ediz., di p. XII-88 e 28 tavole . . . . . 2 —

Disegno — vedi anche Acquaforte - Disegno industriale - Disegno di projezioni ortogonali - Disegno topografico - Monogrammi - Oreficeria floreale - Ornamenti sulle stoffe - Ornatista - Teoria delle ombre.

Disegno industriale, di E. GIORLI, 6ª ediz., di pag 406 . . . . . 5 50

Disegno di projezioni ortogonali, di D. LANDI, 2ª ediz., di p. VIII-152, con 132 figure . . . . . 2 —

Disegno topografico, di G. BERTELLI, 4ª ediz., di p. VI-158, con 12 tav. . . . . 2 —

Disinfezione pubblica e privata, di P. E. ALESSANDRI e L. PIZZINI, 2ª ediz. di p. VIII-258 e 29 inc. . 2 50

— vedi Profilassi e disinfezione.

Distillazione del legno, di F. VILLANI, di p. XIV-312 3 50

Distillazione delle vinacce, delle frutte fermentate e di altri prodotti agrari, di M. DA PONTE. 3ª ediz., di p. XX-826, con 100 fig. . . 8 50

Ditteri italiani, di P. LIOY, di p. VII-356, con 227 fig. 3 —

Divina Commedia, di DANTE ALIGHIERI in tavole schematiche di L. Polacco, di p. X-152 e 6 tavole disegnate da G. Agnelli . . . . . 3 —

Dizionario albanese — vedi Albanese parlato.

Dizionario alpino-italiano, di E. BIGNAMI-SORMANI e C. SCOLARI, di pag. XXII-310 . . . . 3 50

Dizionario di abbreviature latine e italiane, di A. CAPPELLI. 2ª ediz., di pag. LXVIII-528 . 8 50

Dizionario bibliografico, di C. ARLIA, di p. 100 . 1 50

Dizionario biografico universale, di G. GAROLLO, due vol di p. 1118 a 2 colonne . . 20 —

Dizionario di botanica generale, di G. BILANCIONI, di p. XX-926 . . . . . 10 —

Dizionario dei Comuni e frazioni di Comuni del Regno d'Italia, secondo il Censimento 1911, di C. TRIVERIO, con un elenco delle località abitate nelle Colonie italiane, di pag. XII-512 . . . . 4 50

L. C.

Dizionario enologico, di A. DURSO-PENNISI, di p. VIII-465 con 161 inc. . . . . 5 —

Dizionario Eritreo-Italiano-Arabo-Amarico, di A. ALLORI, di p. XXXIII-203 . . . . 2 50

Dizionario fotografico in quattro lingue, di L. GIOPPI, di p. VIII-600, 95 inc. e 10 tavole . . . 7 50

Dizionario francese-italiano, di G. LE BOUCHER, di p. LXIV-556 . . . . . 3 50

Dizionario geografico universale, di G. GAROLLO, 2ª ediz. di p. XII-1451 (esaurito).

Dizionario italiano-giapponese, di S. CHIMENZ, di p. XVIII-219 . . . . . 8 —

Dizionario giuridico — vedi: Dizionario Legale.

Dizionario Greco moderno-Italiano e viceversa, di E. BRIGHENTI, di p. LX-848-612 . . . 15 —

Separatamente:

Vol. I, Greco moderno-Italiano . . . . . 9 —

Vol. II, Italiano-Greco moderno 5 50

Dizionario italiano-inglese e ingl.-ital., di J. WESSELY, 16ª ediz. a cura di G. Rigutini e G. PAYN, di p. VI-226-190 . . . . . 3 —

Dizionario Hoepli della lingua italiana, compilato da G. MARI — vedi Vocabolario.

Dizionario legale, di S. TRINGALI, di pag. XVI-1386 12 —

Dizionario milanese-italiano e italiano-milanese, di C. ARRIGHI, 2ª ediz., di p. 912 . . 8 50

Dizionario russo — Vedi Vocabolario russo.

Dizionario di scienze filosofiche, di C. RANZOLI, 2ª ediz. aumentata e corretta, di pag. VII-1252 . . 15 —

Dizionario serbo di BILINICH (in preparazione).

Dizionario Spagnuolo-Italiano e Italiano-Spagnuolo di G. FRISONI:

I. *Italiano-Spagnuolo.* Vol. di 1018 pag. L. 9.50 - leg. 12 50

Dizionario etimologico stenografico, di E. MOLINA, di p. XVI-624 . . . . . 7 50

Dizionario tecnico in 4 lingue, di E. WEBBER, 4 volumi

I. Italiano-Tedesco-Francese-Inglese, 2ª ediz. di p. XII-533 . . . . . 6 —

II. Deutsch-Italienisch-Französich-Englisch (3ª ed. in lavoro).

III. Français-Italien-Allemand-Anglais, 2ª ediz., di p. VI-679 . . . . . 8 50

IV. English-Italian-German-French, 2ª ed. aumentata di oltre 5000 termini di pag. IV-921 . . . . 12 50

Dizionario italiano-tedesco e ted-ital., di A. FIORI, 5ª ediz. per G. CATTANEO. (esaurito).

Dizionario italiano-tedesco e tedesco-italiano, di G. SACERDOTE, di p. XII-470, XXXII-480 . 6 50

Dizionario universale delle lingue italiana, tedesca, inglese, francese, disposte in un unico alfabeto, di p. 1200 . . . . . 9 50

L. c.

Dogana — vedi: Codice doganale - Codici e Leggi usuali d'Italia. Vol. II, Parte 1ª - Commerciante - Dazi doganali - Trasporti e tariffe.

Dottrina popolare in 4 lingue, (Italiana-Francese-Inglese-Tedesca) Motti, frasi, proverbi di G. Sessa. 2ª ediz., di p. IV-112 . . . . . 2 —

Doveri del macchinista navale, di V. Goffi, di pag. XVI-310 . . . . . 2 50

Droghe e piante medicinali (Materia medica vegetale e animale) di P A Alessandrini, 2ª edizione di pag. XV-778, con 207 inc. 7 50

Droghiere (Manuale del), di L. Manetti, di p. XXIV-322 3 —

Duellante (Manuale del), di F. Gelli, 2ª ediz., di pag. VIII-250 e 26 tav. 2 50

— vedi anche Scherma.

Economia matematica, di F. Virgilii e C. Garibaldi, i p. XII-210 e 19 inc. 1 50

Economia politica, di W. Jevons, trad. L. Cossa, 7ª ediz., di p. XV-180 . . . . . 1 50

Elettricità, di Fleeming Jenkin, traduzione di R. Ferrini, 5ª ediz. riveduta, di pag. XII-237 e 40 incis. 1 50

Elettricità — vedi: Cavi telegrafici - Contabilità imprese elettrotecniche - Correnti elettriche - Elettricità industriale - Elettrotecnica - Elettrochimica - Elettromotori - Enciclopedia galvanica - Frodi sui misuratori elettrici - Fulmini - Galvanizzazione - Illuminazione - Ingegnere elettricista - Magnetismo - Metallocromia - Onde Hertziane - Operaio elettrotecnico - Pila elettrica - Radioattività - Ricettario dell'elettricista - Röntgen - Sovra-tensioni - Telefono - Telegrafia - Unità assolute.

Elettricità industriale, di P. Janet, trad. di G. U. Brovedani, di p. XX-375 e 163 fig. 4 50

Elettricità e materia, di J. J. Thomson, trad. di G. Faè, di p. XL-299 e 18 fig. . . . . 2 —

Elettricità medica. di A. D. Bocciardo, di p. X-201, con 54 inc. e 9 tav. (in ristampa).

Elettricità (Influenza dell') sulla vegetaz. e sui prodotti delle industr. agrarie di A. Bruttini, p. XVI-459 e 59 fig. 4 50

Elettricità sorgente di calore. Riscaldamento elettrico domestico di G. Lo Piano, di pag. VIII-158, con 153 illustrazioni 2 50

Elettrochimica. di A. Cossa, di p. VIII-104 e 10 inc. 1 50

Elettromotori campioni e misura delle forze elettromotrici, di G. P. Magrini, di pag. XVI-185 e 73 fig. . . . . 2 —

Elettrotecnica, (Principi di) di F. Dessy, di p. XII-128 2 50

Elioterapia (L') in alta montagna e trattamento della tubercolosi, di O. Bernhard, traduzione R. Curti, di pag. VII-125 con 49 tavole 3 50

Elioterapia (L') nella pratica medica e nell'educazione, di G. B. Roatta, di pag. XV-155 con 77 tavole 4 —

Eloquenza civile e sacra, L. Asioli di p. IV-290 3 —

L. C.

Embriologia e morfologia generale, di G. CATTANEO, di p. X-242 e 71 fig. (esaurito).

Embrione umano. Embriogenia e organogenia dell'uomo, di C. FALCONE, di p. XV-431, con 90 inc. 4 50

Emigrazione ed immigrazione, di M. ARDUINO, di p. X-248 . . . . . 3 —

Enciclopedia galvanoplastica, elettrochimica e fotomeccanica, di P. CONTER, di pag. VIII-555 e 279 illustr. 5 50

Enciclopedia Hoepli (Piccola) 2ª ediz. completamente rinnovata dal dott. G. GAROLLO:

Volume I - lettere A-D di pag. X-1522 . . 12 50
Volume II - lettere E-M, pag. 1523 a 3114 . . . 16 50
(Il Vol. III ed ultimo è in corso di stampa).

Enciclopedia legale, di S. TRINGALI — vedi Dizionario legale.

Energia fisica, di R. FERRINI, 2ª ediz., di p. VIII-187 e 47 inc. 1 50

Enimmistica. Enimmi, sciarade, rebus, ecc., di D. TOLOSANI, di p. XII-516 e 29 illustr. 6 50

Enologia, di O. OTTAVI, 7ª ediz. rifatta da A. Strucchi, di p. XVI-293, con 50 inc. 2 50

Enologia domestica, di R. SERNAGIOTTO, 2ª ediz., di p. XIV-223, con 26 inc. . . . . 2 —

Enologia — vedi ai singoli titoli: Alcool - Ampelogra- Adulterazione vino - Analisi vino - Bottaio - Cantiniere - Cognac - Costruzioni enotecniche - Densità dei mosti - Distillazione - Dizionario enologico - Liquorista - Malattie vini - Mosti - Produzione del vino - Tannini - Uva - Vini bianchi - Vini speciali - Vinificazione - Vino.

Epidemie esotiche, di F. TESTI, di p. XII-203 . 2 —

Epigrafia cristiana, di O. MARUCCHI, di p. VIII-453, con 30 tav. 7 50

Epigrafia italiana moderna, di A. PADOVAN, di di pag. XXVI-270 . . . . . 3 —

Epigrafia latina, di S. RICCI, di pag. XXXII-448 e 65 tavole 6 50

Epilessia. Eziologia, patogenesi e cura, di P. PINI, di p. X-277 . . . . . 2 50

Equazioni integrali (Teoria delle) di G. VIVANTI, di pagine 414 . . . . . 2 50

— vedi Algebra complementare.

Equilibrio dei corpi elastici, di R. MARCOLONGO, di p. XIV-316 . . . . . 3 —

Eritrea. Storia, geografia e note statistiche, di B. MELLI, di p. XII-164 . . . . . 2 —

Errori e pregiudizi volgari, di G. STRAFFORELLO, 2ª ediz., di p. XII-196 . . . . . 1 50

Esattore comunale, ad uso dei Ricevitori, ecc., di di R. MAINARDI, 2ª ediz., di p. XVI-480 (esaurito).

Esercizi e quesiti sull'Atlante geogr. di R. Kiepert, di L. HUGUES, 3ª ediz., di p. VIII-208 1 50

L. c.

Esercizi sintattici francesi, di D. RODARI, di p. XII-403 . . . . . 3 —

Esercizi greci, di A. V. BISCONTI, 2ª ediz., di pag. XXVII-234 . . . . . 3 —

Esercizi di grammatica italiana, di D. FERRARI, di pag. VIII-236 (esaurito).

Esercizi latini, di P. E. CERETI, di p. XII-333 . . 1 50

Esercizi di traduzione a complemento della gramm. francese, di G. PRAT, 3ª ediz., di p. XII-174 . . . . . 1 50

Esercizi di traduzione a complemento della gramm. tedesca, di G. ADLER, 3ª ediz. di p. VIII-244 (esaurito).

Esplodenti e modi di fabbricarli, di R. MOLINA. 4ª ediz riveduta e ampliata con trattazione completa degli esplosivi moderni di pag. XXXII-422 . . 5 50

Espropriazioni per causa di pubblica utilità, di E. SARDI, di p. VII-212-83 (esaurito).

Essenze naturali. Estrazione - Caratteri - Analisi, ecc., di C. CRAVERI, con 73 figure . . . . . 5 —

Essenze artificiali. Fabbricazione - Caratteri - Analisi, ecc., di C. CRAVERI, con 44 figure 3 50

Estetica. Lezioni sul bello, di M. PILO, (in ristampa).

— **Lezioni sul gusto,** di M. PILO, di p. XII-255 . . 2 50

— **Lezioni sull'arte,** di M. PILO, di p. XV-286 . . 2 50

Estimo rurale, di P. FICAI, 2ª ediz., di pag. XVI-308. 3 —

Estimo dei terreni, di P. FILIPPINI, di p. XVI-328 . 3 —

Etica (Elementi di), di G. VIDARI, 4ª ediz., di pag. XII-389 4 —

Etnografia, di B. MALFATTI, (esaurito).

Euclide emendato, di G. SACCHERI, trad. di G. Boccardini, di p. XXIV-126 e 55 fig. 1 50

Evoluzione. Storia e bibliografia evoluzionistica, di C. FENIZIA, di p. XIV-389 . . . . . 3 —

Ex libris italiani (3500), illustrati da J. GELLI, di p. XII-535, 139 tav. e 757 figure . . . . . 9 —

Fabbricati civili di abitazione, di C. LEVI, 5ª ediz., di p. XII-516 con 261 inc. . . . . 6 —

Fabbricati rurali. Costruzione ed economia, di V. NICCOLI, 4ª ediz., di p. XIX-410, con 185 fig. . . 4 50

Fabbro (Il), di J. ANDREANI, di p. VIII-250, 266 fig. e 50 tavole . . . . . 3 —

Fabbro ferraio (Manuale del), di G. BELLUOMINI, 3ª ediz. di p. VIII-242 e 233 inc. 2 50

Fagiani. Razze, allevamento, di C. BELTRANDI, di p. VIII-182 e 26 fig. 2 50

Falconiere moderno, di G. E. CHIORINO, di p. XV-247, 15 tav. e 80 illustr. . . . . 6 —

Falegname (Il), J. ANDREANI, 2ª ed. p. 309, 264 fig., 25 tav. 3 —

Falegname ebanista, di G. BELLUOMINI, 5ª ediz., di pag. XVI-230 con 120 incisioni 2 50

Farfalle (Le), di A. SENNA. 24 tav. e testo di pag. 195 . 6 50

Farmacista (Man. del), di P. E. ALESSANDRI, 4ª ediz. di p. 984 . . . . . 8 50

L. c.

Farmacologia e Formulario, di P. Piccinini, di p. VIII-382 . . . . . 3 50
Fecola. Sua fabbricazione e trasformazione in destrina, glucosio, ecc., di N. Aducci, di p. XVI-285, con 41 fig. 3 50
Fermentazioni e fermenti, di R. Guareschi, di p. XI-350 . . . . . 3 —
Ferrovie e Tramvie. Costruzioni, Materiali, Esercizio, Tecnologie dei trasporti, di P. Oppizzi, di pagine XXII-1067 con 414 incisioni . . . . . 15 —
Ferrovie e Tramvie (I più recenti progressi della tecnica nelle) di P. Oppizzi, di pag. XIX-291, e 124 inc. 5 50
Ferrovie — vedi: Automobili - Macchinista - Strade ferrate - Trazione ferroviaria - Trazione a vapore - - Trasporti e tariffe - Vocabolario tecnico vol. V e VI.
Fiammiferi e fosforo, di C. A. Abetti, di p. XII-172, e 5 av. 2 50
Fieni dei prati stabili italiani di A. Pugliese, con prefazione di G. Lo Priore, di pag. XII-418 . . . . 4 50
Figure grammaticali a complemento della grammatica, di G. Salvagni, di p. VII-308 . . 3 —
Filatura del cotone, di G. Beltrami, di p. XV-558 e 196 inc. (in ristampa).
Filatura e torcitura della seta, di A. Provasi, di p. VII-281 e 75 fig. 3 50
Fillossera (La) **della vite.** Risultati dei nuovi studi italiani, di R. Grandori, di pag. XVI-256 e 17 tavole. 3 —
Fillossera e malattie crittogamiche della vite, di V. Peglion, di p. VIII-302 e 39 fig. . . 3 —
Films — vedi: Cinematografo.
Filologia classica, greca e latina, di V. Inama, 2ª ediz., di p. XVI-222 . . . . . 1 50
Filonauta (Navigazione da diporto), di G. Olivari, di p. XVI-286 . . . . . 2 50
Filosofia del diritto, di A. Groppali, di p. XI-378 3 —
Filosofia morale, di L. Friso, 3ª ediz., di p. XVI-330 3 —
Filosofia — vedi ai singoli titoli: Dizionario di scienze filosofiche - Estetica - Etica - Evoluzione - Logica - Psicologica.
Finanze (Scienza delle), T. Carnevali, 2ª ed., p. IV-173 1 50
Fiori — vedi: Floricoltura - Garofano - Giardiniere - Orchidee - Orticoltura - Piante e fiori - Rose.
Fiori artificiali, di O. Ballerini, 2ª ed. di p. XVI-368, con 246 figure 3 50
Fisica, di O. Murani 10ª ed. accresciuta, di p. XXIII-956 8 —
Fisica cristallografica, di W. Voigt, trad. di A. Sella, di p. VIII-392 . . . . . 3 —
Fisica medica. (Fisiologia - Clinica - Terapeutica), di G. P. Goggia, pag. XII-954, 300 inc. e una tav. a colori 3 50
Fisiologia, di M. Foster, trad. di G. Albini, 4ª ediz., di p. VII-223 e 35 (in ristampa).
Fisiologia vegetale, L. Montemartini, p. XVI-230 1 50
Fisionomia e mimica, di G. Cerchiari, di p. XII-195, 77 inc. e 33 tav. 3 50
Flora delle Alpi, illustrata di O. Penzig, 2ª ed., di pag. XX-136 con 43 tavole in cromo 6 50
Floricoltura, di G. Roda. 6ª ediz., di p. VIII-284 e 100 inc. 2 50

L. C.

Flotte moderne, E. Bucci di Santa-Fiora, p. IV-204 5 —

Fognatura biologica (depurazione delle acque luride), di F. Lacetti, di pag. XII-376 . . . . . 4 —

Fognatura cittadina, D. Spataro, (esaurito).

Fognatura domestica, di A. Cerutti, di p. VIII-421 e 200 fig. . . . . 4 —

Fondazioni delle opere terrestri e idrauliche e notizie sui sistemi più in uso in Italia, di R. Ingria, di pag. XX-674 con 409 incisioni . . . 7 50

Fonditore in metalli, di G Brunomini, 5ª ediz. di A. Hassenz di pag. 214, con 126 incisioni . . . 3 —

Fonologia italiana, di L. Stoppato (esaurito).

Fonologia latina, di S. Consoli, di pag. 206 . . 1 50

Foreste — Vedi Prontuario del forestale .

Formole e tavole per il calcolo delle risvolte ad arco circolare, di F. Borletti, di p. XII-69 . . . . . 2 50

Formulario scolastico di matematica elementare (aritmetica, algebra, geometria, trigonometria), di M. A. Rossotti, 3ª ediz. riveduta di p. XII-201 2 50

Fosfati e concimi fosfatici, A. Minozzi, p. XII-301 3 50

Fotocromatografia, di L. Sassi, p. XXI-133 e 19 fig. 2 —

Fotografia (i primi passi in), di L. Sassi, 4ª ediz. ampliata di pag. XII-367 con 200 incisioni e 20 tavole . 4 —

Fotografia industriale, di L. Gioppi, di p. XIII-208, con 12 inc. e 5 tav. 3 50

Fotografia pei dilettanti. (Come dipinge il sole), di C. Muffone, 8ª ediz., (in ristampa).

Fotografia a colori. Immagini fotografiche a colori ottenute con sviluppi e viraggi su carte all'argento e su diapositive, di L. Sassi, di pag. XVI-153 . . . 2 —

Fotografia a colori — vedi Autocromista.

Fotografia ortocromatica, di C. Bonacini, di p. XVI-227, 33 fig. e 5 tav. 3 50

Fotografia senza obiettivo, di L. Sassi, di p. XVI-135, 127 inc. e 12 tav. . . . . .

Fotografia turistica, di T. Zanghieri, di p. XVI-279, 84 inc. e 18 tav. 3 50

Fotografia — vedi: Arti grafiche - Autocromista - Carte fotog. - Dizionario fotog. - Fotocromatografia - Fotogr. industriale - Fotogr. ortocromat. - Fotogr. per dilettanti - Fotogr. senza obiettivo - Fotogr. turistica - Fotogrammetria - Fotominiatura - Fotosmaltografia - Primi passi in fotografia - Processi fotomeccanici - Proiezioni - Ricettario fotogr.

Fotogrammetria, fototopografia e applicazioni, di P. Paganini, di pag. XVI-288, 200 fig. 3 50

Fotominiatura, di F. Tuccari, pag. X-136 e 33 tav 3 50

Fotosmaltografia applicata, di A. Montagna, di p. VIII-200 e 16 inc. . . . . 2 —

Fresatore e tornitore meccanico, di L. Duga, 3ª ediz. ampliata, di pag. 188, con 30 inc. 3 50

Frumento. Come si coltiva, di E. Azimonti, 3ª ediz., di pag. XVI-311, con 88 incisioni e 12 tavole . . . 3 —

L. C.

Frutta minori. Fragole, poponi, ecc., di A. PUCCI, di pag. VIII-193 e 96 inc. 2 50

Frutticoltura, di D. Tamaro, 6ª ed., (in ristampa).

Fulmini e parafulmini, di G. CANESTRINI, di pag. VIII-166 (2ª edizione in corso di stampa).

Funghi mangerecci e velenosi, di F. CAVARA, di p. XVI-192, e 43 tavole, (in ristampa).

Furetto. Allevamento e ammaestramento, di G. LICCIARDELLI, di p. XII-172 e 39 fig. 2 50

Funzioni analitiche, di G. VIVANTE, di p. VIII-432 3 —

Funzioni ellittiche, di E. PASCAL, di p. 240 . 1 50

Funzioni poliedriche e modulari, di G. VIVANTI, di p. VIII-437 . . . . . 3 —

Galvanizzazione, pulitura e verniciatura dei metalli, di F. WERTH, 3ª edizione rifatta, di pag. XXVII-700, con 309 incisioni. . . . . 9 —

Galvanoplastica in rame, argento, oro, ecc. di F. WERTH, 2ª ediz., di p. XIV-333, con 167 inc. . 5 —

Galvanostegia, di I. GHERSI, 2ª ediz., rifatta da P. CONTER, di p. XII-383 . . . . . 3 50

Garofano (Dianthus). Coltura e propagazione, di G. GIRARDI e A. NONIN, di p. VI-179, con 98 inc. e 2 tav. 2 50

Gastronomo moderno (Il), di E. BORGARELLO, con 200 Menus, di p. VI-411 . . . . . 3 50

Gaz illuminante (Industria del), di V. CALZAVARA, di p. XXXII-672 e 375 fig. (esaurito).

Gelati, dolci freddi, bibite refrigeranti, conserve di frutta, di G. CIOCCA, di pag. XIX-220 con 146 illustrazioni . . . . . 3 —

Gelsicoltura, di D. TAMARO, 2ª ediz., di p. 274 e 80 inc. 2 50

Geografia, di G. GROVE, trad. di G. GALLETTI. 2ª ed., di p. XII-160 e 26 fig. 1 50

Geografia classica, di H. TOZER, trad. di I. Gentile, 5ª ediz., di p. IV-168 . . . . . 1 50

Geografia commerciale economica universale, di P. LANZONI, 5ª ediz. (in ristampa).

Geografia economica sociale d'Italia, di A. MARIANI, di p. XXVIII-477 . . . . . 4 50

Geografia fisica, di A. GEIKIE, trad. di A. Stoppani, 5ª ediz, di p. IV-132 e 20 inc. (esaurito).

Geologia, di A. GEIKIE, trad. di A. Stoppani, 5ª ediz., a cura G. Mercalli, di p. XII-180 e 49 inc. . . . 1 50

Geologo (Il) **in campagna e nel laboratorio,** di L. SEGUENZA, di p. XV 305 . . . . . 3 —

Geometria analitica, I. Il metodo delle coordinate, di L. BERZOLARI, di p XVI-409 e 54 fig. . . 3 —

Geometria analitica, II. Curve e superficie del secondo ordine, di L. BERZOLARI, di pag. 433, con 19 inc. 3 —

Geometria descrittiva (Elementi di), di C. RAMELLETTI, di pag. XII-197, con 141 incisioni . . . 2 —

Geometria descrittiva (Applicazioni di), di C. RAMELLETTI, di pag. XII-201, con 133 figure . . . 2 —

L. C.

Geometria descrittiva (Metodi della), di G. LORIA, di p. XVI-325 e 102 fig. . . . . 3 —

— vedi: Poliedri, curve e superficie, di G. LORIA, di p. XVI-231 . . . . . 3 —

Geometria elementare (Complementi), di C. ALASIA, di XV-244 e 117 fig. 1 50

Geometria e trigonometria della sfera, di C. ALASIA, di p. VIII-208 e 34 fig. 1 50

Geometria metrica e trigonometria, di S. PINCHERLE 7ª ediz., di p. IV-160, (in ristampa).

Geometria pratica, di E. EREDE, 4ª ediz., di p. XVI-258 e 34 inc. 1 50

Geometria proiettiva del piano e della stella, di F. ASCHIERI, 2ª ediz. (esaurito).

Geometria projettiva dello spazio, di F. ASCHIERI, 2ª ediz., di p. VI-264 e 16 fig. 1 50

Geometria pura elementare, di S. PINCHERLE, 7ª ediz., di p. VIII-176, con 121 fig. (in ristampa).

Geometria elementare (Esercizi), di S. PINCHERLE, 2ª ediz. di p. VIII-136, con 50 fig. 1 50

Geometria elementare. Problemi e metodi per risolverli, di I. GHERSI, 2ª ediz. con 311 problemi e esercizi, di pag. VI-271 e 185 figure 2 50

Gesù (Vita di), di L. ASIOLI, 2ª ediz. riveduta, con una carta topografica della Terra Santa, di pag. XII-253 . 3 —

Giacimenti minerali e acque sotterranee (Ricerca dei), di M. GROSSI, di pag. XVI-380 . 4 50

Giardiniere (Il libro del), di A. PUCCI, 2 volumi.

I. Il giardino e la coltura dei fiori, 2ª ediz., di pagine XI-317 e 144 incisioni 3 50

II. La coltivazione delle piante ornamentali da giardino, 2ª ediz., di p. VIII-325 e 186 inc. . . . 3 50

Giardino infantile, di P. CONTI, di p. IV-213 e 27 tav. 3 —

Ginnastica (Storia della), di F. VALLETTI, di pag. VIII-184 . . . . . 1 50

Ginnastica femminile, di F. VALLETTI, di p. VI-112 e 67 fig. . . . . 2 —

Ginnastica da camera, da scuola e palestra, di J. GELLI, 2ª ediz., di p. VIII-168, con 253 fig. 2 50

Gioielleria, oreficeria, oro, argento e platino — vedi ai singoli titoli: Orefice - Leghe metalliche - Metallurgia dell'oro - Metalli preziosi - Saggiatore - Tavole alligazione.

Giuochi — vedi: Biliardo - Dama - Tennis - Scacchi.

Giuochi ginnastici per le scuole e per il popolo, di F. GABRIELLI, 2ª ediz., di pag. XXIII-217 con 24 illustrazioni 2 50

Giuochi sportivi. (Calcio (Foot-Ball) - Rugby - Water-Polo - Pallone - Palloncino - Tamburello - Tennis - Hockey - Trucco - Pilotta - Sfratto - Golf - Kriket e Vigoro - Bigliardo - Bocce), di G. FRANCESCHI. 2ª ediz. interam. rifatta del Manuale " Il giuoco del Pallone e gli altri affini ", di p. XII-180, con 31 illustrazioni. . 3 50

Giurato (Manuale del), di A. SETTI, 2ª ediz., di p. 26[illegible] 2 50

Giurisprudenza — vedi: Amministrazioni comunali Avarie - Camera di Consiglio - Codici - Conciliatore - Curatore fallimenti - Digesto - Diritto - Economia -

L. C

Finanze - Giurato - Giustizia - Leggi - Legislazione - Mandato commerciale - Notaio - Psicopatologia legale - Polizia giudiziaria - Prontuario tecnico legislativo - Ragion. - Socialismo - Strade ferr. - Testamenti.

Giustizia amministrativa (Principî fondamentali e procedura), di C. VITTA (esaurito).

Glicerina — vedi: Candele.

Glottologia, di G. DE GREGORIO, di p. XXXII-318 . 3 —

Gnomonica. L'orologio solare a tempo vero, di G. BORTINO BARZIZZA, p. VIII-199, 33 inc (sost. il LA LETA) . 2 50

Gomme, Resine, Gommo-resine e Balsami, di L. SETTIMI, di p. XVI-373 e 17 fig. 4 50

Grafologia, di C. LOMBROSO, (esaurito).

Grammatica albanese, di V. LIBRANDI, p. XVI-200 3 —

Grammatica albanese — vedi Albanese parlato.

Grammatica catalana con esercizi pratici e Dizionario di G. FRISONI, di pag. XXIV-279 . . . 3 —

Grammatica croato-serba, G. ANDROVIC, (esaur.)

Grammatica danese-norvegiana, di G. FRISONI, di p. XX-488 . . . . . 4 50

Grammatica ebraica, di I. LEVI fu I. 2ª edizione, di pag. IV-200 . . . . . 2 50

Grammatica egiziana antica, geroglifica, di G. FARINA di p. VIII-185 . . . . . 4 50

Grammatica francese, G. PRAT, 4ª ed., (ristampa).

Grammatica galla (Oromonica), di E. VITERBO, 4 vol.

I. Galla-italiano, di p. VIII-152 . . . . . 2 50

II. Italiano-galla, di p. LXIV-106 . . . . . 2 50

Grammatica greca, di V. INAMA, 2ª ed. (in ristampa)

Grammatica del greco-moderno, di R. LOVERA, 2ª ediz., di p. VI-220 (in ristampa).

Grammatica inglese, L. PAVIA, 4ª ediz. di pag. 288 3 —

Grammatica italo-Araba con vocabolario comparativo tra l'Arabo letterario e il Dialetto libico, di G. SCIALHUB, di pag. XVI-389 . . . . . 5 50

Grammatica italiana, di C. CONCARI, rifatta da G. B. MARCHESI, 4ª ediz., riveduta e corredata di esercizi di applicazione del Prof. D. FERRARI, di p. VIII-201 1 50

Grammatica italiana (Esercizi di), per le scuole secondarie, di D. FERRARI, (in ristampa).

Grammatica latina, L. VALMAGGI, 2ª ed., p. VIII-256 1 50

Grammatica magiara, di A. ALY-BELFADEL, di p. XIX-332 . . . . . 3 —

Grammatica olandese, di M. MORGANA, p. VIII-224 3 —

Grammatica persiana, A. DE MARTINO, p. VI-207 3 —

Grammatica portoghese-brasiliana, di G. FRISONI, 3ª ediz., di p. XVI-356 . . . . . 3 50

Grammatica provenzale, di E. PORTAL, di pagine VIII-252 . . . . . 1 50

Grammatica della lingua romena, R. LOVERA, 3ª ed. con l'aggiunta di modelli di lettere e di un vocabolario delle voci più usuali, di pag VIII-211 . . 2 50

Grammatica russa di VOINOVICH, di pag. XII-272 . 3 —

— vedi anche: Lingua russa - Vocabolario russo.

Grammatica serba di B. GUYON, (in corso di stampa).

Grammatica slovena, di B. GUYON, 2ª ediz ampliata, di pag. 363 . . . . . 5 50

L. C.

Grammatica somala. Elementi di Somalo e di Ki-Suahili parlato ai Benadir, di E. CARCOFORO di pagine VIII-154 . . . . . 2 50

Grammatica spagnuola, di L. PAVIA, 4ª ediz., di p. XII-194 . . . . . 1 50

Grammatica storica della lingua e dei dialetti italiani, di F. D'OVIDIO e G. MEYER-LÜBKE, trad. di E. Polcari di p XII-301 (in ristampa).

Grammatica svedese, di E. PAROLI, di p. XV-293 3 —

Grammatica tedesca, L. PAVIA, 4ª ed. di p. XX-296 3 —

Grammatica turco-osmanli, di L. BONELLI, di p. VIII-200 (esaurita).

Gravitazione. Spiegazione delle perturbazioni solari, di G. B. AIRY, trad. F. PORRO, di p. XXII-176 e 50 fig. 1 50

Grecia antica — vedi: Antichità greche - Archeologia - Atene - Cultura greca - Mitologia greca - Monete greche - Storia antica.

Greco moderno — vedi: Conversazione ital.-neoellenica - Crestomazia - Grammatica - Dizionario.

Gruppi continui di trasformazioni. di E. PASCAL, di p. XI-378 . . . . . 3 50

Guida numismatica universale, di F. GNECCHI, 4ª ediz., di p. XV-612 . . . . . 8 —

Humus. Fertilità e igiene dei terreni, di A. CASALI, di p. XVI-210 . . . . . 2 —

Idraulica, di E. ZENI, 2ª ediz. rifatta del Manuale di T. Perdoni, di p. XXXI-480, 290 fig. e 3 tav. . . . 7 50

— vedi: Fondaz. terrestri e idrauliche. - Sistemaz. torrenti.

Idraulica fluviale, di A. VIAPPIANI, p. XI-259, 92 fig. 3 50

Idrobiologia applicata, di F. SUPINO, di pag. 290 con 134 incisioni 3 50

Idroterapia, di G. GIBELLI, di p. IV-238 e 30 inc. . 2 —

Igiene della bocca e dei denti, di L. COULLIAUX, di p. XVI-330 e 23 fig. (in ristampa).

Igiene del lavoro, di A. TRAMBUSTI e G. SANARELLI, di p. VIII-262 e 70 inc. 2 50

Igiene della mente e dello studio, di G. ANTONELLI, di p. XXIII-410 . . . . . 3 50

Igiene ospedaliera, di C. M. BELLI:

Vol. I. - Costruzioni degli Ospedali-Ospizi e stabilimenti affini, di pag. VII-503, con 253 incisioni . . 6 50

Vol. II. - Ordinamento dei servizi negli ospedali, di pag. 366, con 167 incisioni . . . . . 5 —

Igiene della pelle. di A. BELLINI, di p. XVI-240 . 2 —

Igiene del piede e della mano. Pedicure e manicure, di G. ANTONELLI, di p. XVI-459 e 33 fig. . . 4 50

Igiene della vita pubblica e privata, di G. FARALLI (in ristampa).

Igiene privata e medicina popolare, di C. BOCK. 3ª ediz. ital. di G. GALLI, di pag. XVI-303 . . 2 50

Igiene rurale, di A. CARRAROLI, di p. X-470 . . 3 —

Igiene scolastica, di A. REPOSSI 2ª ediz., p. IV-246 2 —

Igiene della scuola e dello scolaro, di M. RAGAZZI, di pag. XII-386 . . . . . 3 50

L. c.

Igiene sessuale ad uso dei giovani e delle scuole, di G. FRANCESCHINI, 2ª ediz. di p. XII-192 3 —

Igiene del sonno, di G. ANTONELLI, di p. VI-224 . 2 —

Igiene veterinaria, di U. BARPI, di p. VIII-221 . 2 —

Igiene della vista, di A. LOMONACO, di p. XII-272 . 2 50

Igienista (Manuale dell'), ad uso degli Ufficiali sanitari, studenti, ecc., dei dott. C. TONZIG e G. Q. RUATA, di p. XII-374 e 243 fig. . . . . 5 —

Igroscopi, igrometri, umidità atmosferica, di P. CANTONI, di p. XII-142 e 24 fig. 1 50

Illuminazione elettrica. Impianti ed esercizii, di E. PIAZZOLI, 6ª ediz., p. XII-955, 468 fig. (in ristampa).

Imbalsamazione umana, di F. DI COLO, di p. X-174 e 15 fig. 2 50

— vedi: Naturalista preparatore.

Imbianchino decoratore, D. FRAZZONI, p. X-193 2 50

Imenotteri, neurotteri, pseudoneurotteri, ortotteri e rincoti, di E. GRIFFINI, di p. XVI-687 e 243 fig. 4 50

Imitazione di Cristo, di G. GERSENIO, volgarizzazione di C. GUASTI e note di G. M. ZAMPINI, 2ª ediz. di pag. L-462 . . . . . 4 50

Imitazioni — vedi Prodotti e procedimenti nuovi.

Immunità e resistenza alle malattie, di A. GALLI-VALERIO, di p. VIII-218 . . . . . 1 50

Impianti elettrici a correnti alternate, di A. MARRO. 3ª ediz., di pag. XLVIII-862, con 379 incisioni e 81 tabelle 10 50

Imposte dirette. Riscossione, ecc., di E. BRUNI, di p. VIII-158 . . . . . 1 50

Incandescenza a gaz. Fabbricazione reticelle, di L. CASTELLANI, di p. X-140 e 33 inc. . . . . 2 —

Inchiostri da scrivere, R. GUARESCHI, p. VIII-162 2 50

Industria frigorifera, di P. ULIVI, 2ª ediz., di p. XVI-272 e 74 fig. . . . . —

Industria dei saponi — vedi: Saponi.

Industria tartarica, di G. CIAPETTI, di p. XV-276 e 52 fig. . . . . 3 —

Industria tessile. Analisi e fabbricazione dei tessuti tinti in filo e tinti in pezza, di F. Fachini, di pagine XII-211, con 30 incisioni 2 50

Industria tintoria, di M. PRATO, p. XXI-292, e 7 fig 3 —

Industrie (Piccole), di I. GHERSI, 3ª ediz., di p. XII-388 3 50

Infanzia — vedi: Rachitide - Malattie dell' - Giardino infantile - Nutrizione - Ortofrenia - Posologia - Sordomuto.

Infermieri (Istruzioni per gli) — vedi: Assistenza.

Infezione — vedi: Disinfezione - Medicatura antisettica

Infortuni sul lavoro. (Mezzi tecnici per prevenirli di E. MAGRINI, di pag 285 con 257 incisioni. 3 —

Infortuni in montagna. Manuale per gli alpinisti di O. BERNHARD, trad. R. Curti, di p. XVII-60, e 55 tav. 3 50

Ingegnere civile e industriale (Manuale dell')

L. C.

di G. COLOMBO, 36ª e 37ª ediz. (101 e 106° migliaio), di pagine 494, con 236 fig. . . . . 9 —

Ingegnere costruttore meccanico, di C. MALAVASI, 3ª ediz. di pag. XXXIV-862, con 1564 fig. . . 12 50

Ingegnere elettricista, di A. MARRO, 2ª ediz., di XXXV-862 e 254 fig. 10 50

Ingegnere navale, di A. CIGNONI, di pag. 324 e 36 fig. 5 50

Insegnamento dell'italiano, di G TRABALZA, di p. XVI-254 . . . . . 1 50

Insetti dellecase e dell'uomo e malattie che diffondono, con riguardo al modo di difendersene nelle città, nelle campagne, al fronte, di A, BERLESE, p. XII-293, con 100 inc. 4 50

Insetti nocivi all'agricoltura e alla selvicoltura, di C. CRAVERI, di pag. X-481, con 229 fig. 4 —

Insetti utili, di F. FRANCESCHINI, p. XII-160, 42 fig. 2 —

Interesse e sconto, di E. GAGLIARDI. 3ª ed., di p. 209 2 —

Invecchiamento artificiale dei vini, aceti e spiriti di A. DURSO-PENNISI, di pag. 1?5, con 35 inc. . 2 50

Inventore (Guida dell'), di I. GHERSI. Consigli, istruzioni, leggi, di pag. XII-511 . . . . . 4 —

Invenzioni utili (Piccole), di S. PAOLETTI, di p. XVI-252 e 156 fig. 2 50

Ipoteche (Man. per le), di A. RABBENO (in ristampa).

Islamismo, di I. PIZZI, di p. VIII-494 . . . . 3 —

Italia dialettale di G. BERTONI, di pag. 257 . . . 3 50

Ittiologia italiana, di A. GRIFFINI, di p. 487 e 244 fig. 4 50

Jucche (Le), di G. MOLON, di pag. VIII-247, con 53 tavole in nero e 8 colorate 6 50

Laminazione del ferro e dell'acciaio, di M. BALSAMO, di p. VIII-139, 50 fig. e 5 tav. . 2 —

Laterizi, di G REVERE, di p. XII-298 (in ristampa).

Latino volgare (Il), di C. H. GRANDGENT, traduzione di N. MACCARONE, di pag. XXIV-298. . . . . 3 —

Latte e latterie sociali cooperative, di E. REGGIANI, di p. XII-444, con 96 fig. . . . . 4 —

Lavorazione dei metalli, di C. ARPESANI, 2ª ediz. rinnovata, di pag. XVI-603, (in ristampa).

Lavorazione dei legnami, di C ARPESANI, 2ª ediz. (in corso di stampa).

Lavori femminili, di T. e F. ODDONE, di p. VIII-543, 822 inc. e 48 tav. . . . . 7 —

Lavori femminili — vedi anche: Abiti per signora - Biancheria - Macchine da cucire - Monogrammi - Trine a fuselli.

Lavori marittimi e impianti portuali, di F. BASTIANI, di p. XXIII-424, con 209 fig. 6 50

Lavori in terra, di B. LEONI di p. XI-305 e 38 fig. 3 —

Lavoro donne e fanciulli. Legge, regolamento con note di F. Noseda, di p. XV-174 . . . . . 1 50

Lawn-Tennis — vedi: Tennis.

Lectures françaises et thèmes italiens, di J. PRAT, di pag. VI-158 . . . . . 1 50

Legatore di libri, di G. G. GIANNINI, 2ª ediz. ampliata, di pag. 263 con 27 tavole di cui 2 a colori . 4 50

Legge comunale e provinciale, annotata da S. MAZZOCCOLO. 7ª ediz. (in corso di stampa).

L. C.

Legge elettorale politica (La nuova), accuratamente riveduta sul testo ufficiale 0 50

Legge sugli infortuni sul lavoro, di A. SALVATORE, di p. 312 . . . . . 3 —

Legge sui lavori pubblici e regol., di L. FRANCHI, di p. IV-110-XLVIII (esaurito).

Legge Notarile (La nuova) e Regolamento Settembre 1914, commentata da E. BRUNI, di pag. XII-571 . . 4 50

Legge sull'ordinamento giudiziario, di L. FRANCHI, di p. IV-92-CXXVI 1 50

Leggende popolari, di E. MUSATTI, 3ª ediz., di p. VIII-181 . . . . . 1 50

Leggi — vedi: Codici.

Leggi sulla sanità e sicurezza pubblica, di L. FRANCHI, di p. IV-108-XCII 1 50

Leggi sulle tasse di registro e bollo, di L. FRANCHI, di p. IV-124-CII (esaurito).

Leghe metalliche ed amalgame, di I. GHERSI, 2ª ediz., di p. XII-433 e 22 fi . . . . . 4 —

Legislazione agraria italiana Codice della) di E. VITA, di pag. XXVII-718 . . . . . 6 50

Legislazione sulle acque, di D. CAVALLERI, di p. XV-274 . . . . . 2 50

Legislazione rurale, di E. BRUNI, 3ª ediz., di p. XII-450 . . . . . 3 —

Legislazione sanitaria italiana, di E. NOSEDA, di p. VIII-570 . . . . . 5 —

Legnami indigeni ed esotici. Usi e provenienze, di O. FOGLI, di p. VIII-197, con 37 fig. 2 50

Lepidotteri italiani, di A. GRIFFINI, di p. XIII-248, con 149 fig. . . . . 3 —

Letteratura albanese, di A. STRATIGÒ, di pag. XXIV-280 . . . . . 3 —

Letteratura americana. di G. STRAFFORELLO, di p. 158 . . . . . 1 50

Letteratura araba, di I. PIZZI, di p. XII-388 . . 3 —

Letteratura assira, di B. TELONI, di p. XV-265 3 —

Letteratura bizantina (Storia della) (324-1453) di G. MONTELATICI, di pag. VIII-292 . . . . . 3 —

Letteratura drammatica, di C. LEVI, di pag. XII-339 . . . . . 3 —

Letteratura ebraica, 2 volumi, di A. REVEL, di p. 364 . . . . . 3 —

Letteratura egiziana, di L. BRIGIUTI, (in lavoro).

Letteratura francese, dalle origini ai nostri giorni, di G. PADOVANI, di pag. XX-525 . . . . . 3 —

Letteratura e crestomazia giapponese, di P. ARCANGELI, di pag. XVI-299 . . . . . 3 50

Letteratura greca, di V. INAMA, 18ª ediz. ampliata ed in parte rifatta da D. BASSI e E. MARTINI, p. XVI-316 3 —

Letteratura indiana, di A. DE GUBERNATIS, di p. VIII-159 (esaurito).

Letteratura inglese, di F. A. LAING e I. CORTI, di pag. VIII-206 1

L. C.

Letteratura italiana, di C. FENINI, 6ª ediz. rifatta da V. Ferrari, di p. XII-268 (in ristampa).
Letteratura italiana moderna e contemporanea, di V. FERRARI. 3ª ediz., di p. VIII-340 . 3 —
Letteratura italiana. Insegnamento pratico, di A. DE GUARINONI, di p. XIX-336 . . . . . 3 —
Letteratura militare, di E MARANESI (esaurito).
Letteratura norvegiana, di S. CONSOLI, di p. 288 1 50
Letteratura persiana, di I. PIZZI, di p. X-208 1 50
Letteratura provenzale moderna, di E. PORTAL, di p. XVI-221 . . . . . 1 50
Letteratura romana, di F. RAMORINO, 8ª ediz. di p. VIII-349 . . . . . 1 50
Letteratura rumena, di R. LOVERA, di p. X-199 . 1 50
Letteratura spagnuola, di B. SANVISENTI, di p. XVI-202 . . . . . 1 50
Letteratura tedesca, di O. LANGE, 3ª ediz. ital. di R. Minutti (in ristampa).
Letteratura ungherese, di ZIGANY-ARPAD, di p. XII-205 . . . . . 1 50
Letteratura universale, di P. PARISI, di pag. 399 3 —
Letterature slave, di D. CIAMPOLI, 2 vol.
I. Bulgari Serbo-Croati, Jugo-Russi, di p. IV-144 1 50
II Russi, Polacchi, Boemi, di p IV-142 1 50
Lignite, legno e torba, di G. MALATESTA e G. GUARDABASSI, di pag 406, con 92 fig. nel testo. . . . 6 50
Lettura delle carte topografiche, di A. FERRARI, di pag. XII-365, con 98 incisioni e 10 tavole . 5 50
Limnologia. Studio dei laghi, di G. P. MAGRINI, di p. XV-212 e 53 fig. . . . . 3 —
Lingua cinese parlata, di F. MAGNASCO, di p. 180 2 —
Lingua giapponese parlata, di F. MAGNASCO, di p. XVI-110 . . . . . 2 50
Lingua gotica, di S. FRIEDMANN, di p. XVI-833 . 3 —
Lingua italiana — vedi: Arte del dire - Corrispondenza - Dialetti - Enciclopedia Hoepli - Figure grammaticali - Grammatica - Insegnamento d. italiano - Italia dialettale - Morfologia - Ortoepia - Retorica - Ritmica - Verbi italiani - Vocabolario ital.
Lingua latina — vedi: Abbreviature latine - Ape latina - Epigrafia - Esercizi - Filologia classica - Fonologia - Grammatica - Latino volgare - Letteratura romana - Metrica - Sinonimi lat. - Verbi.
Lingua russa. Grammatica ed esercizi, di P. G. SPERANDEO, 4ª ediz. di p. IX-274 . . . . . 4 —
— vedi: Grammatica russa - Vocabolario russo e italiano.
Lingue dell'Africa, di C. CUST, trad. di A. De Gubernatis, di p. IV-110 . . . . . 1 50
Lingue germaniche — vedi: Grammatica danese-norvegiana, inglese, olandese, tedesca, svedese.
Lingue neo-elleniche — vedi: Conversazione Crestomazia - Dizionario greco mod.
Lingue slave — vedi Grammatica croato-serba, Grammatica slovena, Grammatica albanese, L'albanese parlato.
Lingue neo-latine, di E. GORRA. (2ª ediz. in lavoro).

L. C

Lingue straniere, di C. MARCEL, trad. di G. DAMIANI, di p. XVI-136 . 1 50

Linguistica - vedi Grammatica storica della lingua

Figure (Le) grammaticali - Verbi italiani.

Liquorista, di A. CASTOLDI, 2000 ricette pratiche, 3ª ediz. rifatta del Man., A. Rossi, pag. XVI-731 e 19 inc. 9 —

Litografia, di C. DOYEN, di p. VIII-261, con 8 tav. 4 —

Livellazione pratica, di A. VEGLIO, p. XII-129, 47 fig. 2 —

Locomobili e trebbiatrici. Man. pel conduttore, di L. CEI. 3ª ediz. di p. XVI-376, 227 fig. e XXXVII tab. 3 —

Logaritmi a 5 decimali, di O. MULLER, 13ª ediz. a cura di M. RAINA. di p. XXXVI-121 . 1 50

Logica, di W. . JEVONS, trad C. CANTONI. 5ª ediz., di p. VIII-156, con 15 fig. 1 50

Logica matematica, di C. BURALI-FORTI, p. VI-158 1 50

Logismografia, di C. CHIESA, 4ª ediz. con note del prof. A. MASETTI di p. XV-196 . . . . 1 50

Lotta greco-romana con cenni storici sulla Storia della lotta, di A. COUGNET, di pag. VIII-490 con 168 fotografie di celebri lottatori e 126 figure nel testo. . 5 50

Lotte libere moderne. Svizzera, Islandese, Giapponese, Americana, Turca, di A. COUGNET, di pagine XXIV-223, con 190 incisioni 2 50

Luce e colori, di G. BELLOTTI. (2ª ediz. in lavoro).

Luce e suono, di E. JONES, trad. di U. Fornari, di p. VIII-336 e 121 inc. . . . . 3 —

Luce e salute. Fototerapia e radioterapia, di A. BELLINI, di p. XII-362 e 65 fig. 3 50

Macchine e caldaie (Aiutante di). S. DINARO, di pagine XV-80, con 112 tav. e 170 fig. (in ristampa).

Macchine (Il montatore di) di S. DINARO, 2ª ediz. di p. XVI-502 e 62 incis. . . . . 4 —

Macchine per cucire e ricamare, di A. GALASSINI, di p. VII-230 e 100 fig. 2 50

Macchine utensili moderne (I problemi pratici delle), di S. DINARO, di pag. XVI-157 . . 2 50

Macchine a vapore e Turbine a vapore, di H. HAEDER e E. WEBBER. 2ª ediz. ital., di p. XX-627 con 1822 incis. . . . . 10 —

Macchinista e fochista, di G. GAUTERO e L. LORIA 14ª ed. rifatta da C. Malavasi, p. XVI-318 e 188 fig. 3 50

Macchinista navale e Costruttore Meccanico di E. GIORLI, 2ª ed. rifatta, di pag. 591 e 350 fig. 8 50

Macelli moderni. Conservazione delle carni, di F. A. PESCE, di p. XV-510 e 73 fig. . . 6 50

Madreperla. Suo uso nella industria e nelle arti, di E. ORILIA, di p. VIII-258, 40 fig. e 4 tav. 4 50

Magnetismo ed elettricità, di F. GRASSI, 4ª ed. di p. XXII 878, con 398 fig. e 6 tav. . . . . 9 —

Magnetismo e ipnotismo. di G. BELFIORE, 4 ed., di pagine VIII-465 (in ristampa).

Maiale. Razze, riproduzione allevamento, di E. MARCHI. 3ª ediz. a cura C. PUCCI. di pag. XVI-602 e 103 inc. 7 50

Maioliche e porcellane, di L. DE MAURI. 2ª ediz. di pag. XIV-843, con 430 incis., 43 tav. e 3500 marche 12 50

L. C.

Mais o granoturco. Coltivazione, di E. AZIMONTI. 2ª ediz., di p. XII-196 e 61 inc 2 50

Malaria e risaie in Italia, di G. ERCOLANI, di p. VIII-203 . . . . . 2 —

Malattie degli animali utili all'agricoltura, di P. A. PESCE, di pag. XII-611 . . . . . 5 50

Malattie crittogamiche delle piante erbacee, di R. WOLF, trad. di P Baccarini, di p. X-263 e 50 inc. . . . . 2 —

Malattie dell' infanzia, di G. CATTANEO, di pagine XII-506 . . . . . 4 —

Malattie infettive degli animali, di U. FERRETTI, di p. XX-582 . . . . . 4 50

Malattie dei lavoratori e igiene industriale, di G. ALLEVI, di p. XII-421 . . . 3 50

Malattie mentali. di L. MONGERI, di p. XVI-263 con 26 tav. 3 50

Malattie dell' orecchio, del naso e della gola, di T MANCIOLI, di p XXIII-540, con 98 inc. 5 50

Malattie dei paesi caldi, di C. MUZIO, di p. XII-562, con 154 fig. e 11 tav. 7 50

Malattie della pelle, di G. FRANCESCHINI, di pagine XVI-217 . . . . . 2 50

Malattie dei polli ed altri volatili, di P. A. PESCE, di p. XVI-297 e 50 incis. 2 50

Malattie del sangue. Ematologia di E. REBUSCHINI, di p. VIII-432 . . . . . 3 50

Malattie sessuali, di G. FRANCESCHINI, 3ª ediz., di pag. XV-280 . . . . . 3 50

Malattie e alterazioni del vino, di S CETTOLINI, 2ª ediz., di p. VIII-330 e 15 fig. . . . . 3 —

Malattie dei vini. Chiarificazione, di R. AVERNASACCÀ, di p. XII-400 e 23 fig. 3 50

Mandato commerciale, di E. VIDARI, di p. VI-160 1 50

Mandolinista (Man. del) di A. PISANI (2ª ediz. in corso d stampa).

Maniscalco pratico, di C. VOLPINI. Anatomia, ferratura, di p. XVI-398 e 193 fig. 4 50

Manzoni A., Cenni biografici di L. BELTRAMI, di p. 109, con 9 autografi e 68 inc. 1 50

Mare (Il) di V. BELLIO, di p. IV-140 e 6 tav. . . . 1 50

Maria (Vita di), di L ASIOLI, pag. VIII-202 . . 3 —

Marina — vedi: Attrezzatura navale · Bandiere · Capitano marittimo · Canottaggio · Ingegnere navale · Filonauta · Flotte moderne · Marine da guerra · Marino · Nautica stimata · Astronomia nautica · Codice di marina · Avarie e sinistri marittimi.

Marine da guerra del mondo al 1897, di L. D'ADDA, di p. XVI-320 e 77 ill. 4 50

Marino (Manuale del) Militare e mercantile, di G. DE AMEZZAGA, 2ª ediz. con appendice di E. B. di Sanafiora, di p. VIII-438, con 18 silografie . . . 5 —

Marmista, di A. RICCI 2ª ediz., di p. XII-154 e 48 inc. 2 -

Massaggio, di R. MAINONI, p. XII-179 (2ª ed. in lavoro).

L. C.

Matematica attuariale, di U. Broggi, di pagine xv-347 . . . . . 3 50
— vedi: Scienza attuariale.
Matematica (Complementi di) ad uso dei chimici, di G. Vivanti, di p. x-381 (in ristampa).
Matematica dilettevole e curiosa. Problemi, Giuochi, ecc., di I. Ghersi, di pag. 740 con 693 figure 9 50
Matematiche — vedi: Algebra - Aritmetica - Astronomia - Calcolo Celerimensura - Compensazione errori - Computisteria - Contabilità - Cubatura - Legnami - Curve - Economia matematica - Equazioni integrali - Formolario - Gruppi di trasformazione - Interesse - Logaritmi - Logica matematica - Ragioner - Storia della matematica - Trigonometria - Tracciamento curve - Triangolazioni.
Matematiche superiori (Repertorio di), di E. Pascal. 2 vol.
I. **Analisi**, di p. xvi-842 . . . . . 6 —
II. **Geometria e indice per i due vol.**, di p 950 . . 9 50
Materia medica moderna, di G. Malacrida, di p. xi-761 (esaurito).
Materie grasse (Industria), I grassi e le cere, di S. Fachini, di p. xiii-651 . . . . . 6 50
Mattoni e pietre di sabbia e calce (Arenoliti), di E. Stoffler e M. Glasenapp, con aggiunte di G. Revere, di p. viii-232, 85 fig. e 3 tav. . . . . 3 —
Meccanica, di R. S. Ball, trad. I. Benetti, 6ª ed., riveduta e ampl. da C. Mavavasi, di p. xvi-198 e 87 fig. 2 50
Meccanica agraria, di V. Niccoli, 2 vol.
I. **Lavorazione del terreno**, 2ª ed. di p. 470 e 176 inc. 4 50
II **Dal seminare al compiere la prima manipolazione dei prodotti**, di p. xii-426 e 175 fig. 4 —
Meccanica applicata (Man. elem. di) di F. Massero, per le offic. e scuole operaie. Pag. xx-434 con 371 inc. 6 50
Meccanica industriale nelle scuole e per l'officina, di S. Dinaro, 2ª ediz. di p. 516 e 100 figure 6
Meccanica del macchinista di bordo, di E. Giorli, di p. xiii-297 e 92 fig. 2 50
Meccanica razionale, di R. Marcolongo, 2 vol.
Cinematica - Statica, 2ª ediz. di pag. xv-323, con 32 inc. 4 50
II. **Dinamica-Idromeccanica**, di p. vi-324 e 24 inc 3 —
Meccanica (Tecnologia) — v.: Aeronautica - Aggiustatore - Appr. meccan. - Automobilista - Aviazione Caldaie - Chauffeur - Costruzioni metalliche - Dinamica - Disegnatore meccanico - Disegno industriale - Fresatore - Ingegnere civile - Ingegnere costruttore meccanico - Lavorazione dei metalli - Locomobili - Macchine (Atlante di), (Montatore di) - Macchine utensili - Macchinista e fuochista - Macchinista navale - Meccanico - Meccanismi - Modellatore meccanico - Momenti di inerzia - Orologeria - Termodin. - Tornitore meccan.
Meccanico (Il), di E. Giorli. 7ª ediz., di p. xvi-537 e 341 fig. (in ristampa)
Meccanico moderno (guida pratica del) di A. Massenz. Manuale teorico-pratico ad uso dei capi-officina ed alunni delle scuole ind. e d'arti e mestieri, meccanici, tornitori, fabbri, di pag. xxiv-351 con 331 inc. 4 50

L. C.

Medicamenti — vedi: Diabete melito - Droghe - Elioterapia - Farmacista - Farmacoter. - Materia med. - Medicatura - Med. d'urgenza - Med. prat. - Posologia Prodotti chimici organ. - Rimedi - Sieroterapia Sifilide - Soccorsi urgenza - Specialità medicinali - Veleni.

Meccanismi (600). Dinam., Idraul., Pneumat., ecc., di T. BROWN. 6ª ediz. ital. a cura di C. Malavasi, di pag. 303, con 605 figure 4 50

Medicatura antisettica, di A. ZAMBLER, con prefazione di E. Tricomi, di p. XVI-124 e 6 inc. . . 1 50

Medicina d'urgenza, di E. TROMBETTA (esaurito).

Medicina legale militare, di E. TROMBETTA, di p. XVI-330 (esaurito).

Medicina sociale, di G. ALLEVI, di p. 400 . . 3 50

Medicina dello spirito, di C. GIACHETTI, pag. 235. 2 50

Medico (Il) **a bordo e nei paesi tropicali,** di R. RIBOLLA, di pag. XIX-326 . . . . . 3 50

Medico pratico, di C. MUZIO, 4ª ediz., di p. XV-962 . 8 50

Membra artificiali (Vitalizzazione delle) di G. VANGHETTI, di pag. 241, con 137 figure 3 50

Merceologia tecnica, di P. ALESSANDRI, due vol.
Vol. I. Materie prime, p. XI-530, 142 tav. e 93 inc. 6 —
Vol. II. Prodotti chimici, di p. 526, 83 tav. e 16 inc. 6 —

Merceologia e istituzioni commerciali, di E. BIANCHI (in sostituzione del Manuale di LUXARDO) di pag. XVI-488 . . . . . 4 50

Mesotorio (Il) nella cura di alcune dermatosi e neoformazioni maligne della pelle, di A. MASOTTI, di pag. 140, con 49 inc. nel testo . . . . . 2 —

Metalli preziosi. Argento, oro, platino, di A. LINONE, di p. XI-315 . . . . . 3 —

Metallocromia. Colorazione e decorazione dei metalli, di I. GHERSI, 2ª ediz., di pag. XVI-317 . . . 3 50

Metallografia applicata ai prodotti siderurgici, di U SAVOIA, di p. XVI-205 e 94 fig. . . 3 50

Metallurgia — vedi: Acciai - Coltivazione delle miniere - Fonditore - Lavorazione metalli - Leghe metalliche - Meccanica industriale - Metallografia - Ricettario dell'elettricista - Ricett. di metallurgia - Saldature - Siderurgia - Tecnologie pei giovani - Tempera e cementazione - Zinco.

Metallurgia dell'oro, di E. CORTESE, di p. XV-262 e 35 inc. . . . . 3 —

Meteorologia agricola, di G. COSTANZO e C. NEGRO, di p. VIII-208 e 27 inc. 2 50

Meteorologia generale, di L. DE MARCHI, 2ª ediz., di p. XVI-225 con 13 fig. e 6 tav. 1 50

Metrica dei greci e dei romani, di L. MÜLLER, 2ª ediz. ital. di G. Clerico, di p. XVI-186 . . . 1 50

Metrologia universale e codice metrico internazionale, di A TACCHINI. di p. XX-482 . 6 50

Mezzeria pratica, di A. RABBENO (Esaurito).

Microbiologia. Malattie infettive, di L. PIZZINI, di p. VIII-142 . . . . . 2 —

Microscopia — vedi: Anatomia microscopica - Animali parassiti - Batteriologia - Chimica clinica - Microscopio - Protistologia - Tecnica protistologica.

L C.

Microscopio (Il), di C. ACQUA, 2ª ediz., di p. XII-230 . 2 —

Militaria — vedi: Armi antiche - Arte militare - Codice cavalleresco - Duellante - Scherma - Tattica - Telemetria - Tiro a segno - Ufficiale esercito.

Mineralogia descrittiva, di L. BOMBICCI, 3ª ediz. a cura di P. Vinassa De Regny, di p. IV-330, con 138 fig. . . . . 3 —

Mineralogia generale, di L. BOMBICCI. 3ª ediz. a cura di P. Vinassa De Regny, di p. XVI-210, con 193 fig. e 2 tav. (in ristampa)

Minerali (I), per E. ARTINI, di pag. XVI-422, con 40 tav. e 132 incisioni. 9 50

Miniere (Coltivazione delle), di S. BERTOLIO. 3ª ediz., di pag. VIII-371, con 112 incisioni 4 50

Minimi quadrati. Formole, Esercizi e Applicazione alla Topografia, di P. FANTASIA, di pag. XVI-339, con 107 esercizi . . . . . 4 —

Misuratori elettrici (Frodi nei), di M. LANFRANCO, di p. XI-277, con 27 inc. e 39 tavole 5 50

Mitologia classica illustrata. di F. RAMORINO, 5ª ediz. di p. X-356 e 91 fig. (in ristampa).

Mitologia (Dizionario di), di F. RAMORINO (in lavoro).

Mitologia greca, in due vol.
I. Divinità. II. Eroi, di A. FORESTI (2ª ediz. in lav.)

Mitologia tedesca, di R. MINUTTI, di p. XX-348 . 3 —

Mitologie orientali, di D. BASSI.
I. Mitologia Babilonese, Assira, di p. XVI-219 . . 1 50

Modellatore meccanico, falegname, ebanista, di V. GOFFI. 2ª ediz. di p. XVII-435 . . 5 50

Molini. Industria. Costruzioni ecc. di C. SIBER MILLOT, 3ª ediz. rifatta da C. MALAVASI, di pag 425, con 226 figure e dieci tavole 7 50

Momenti d'inerzia e loro applicazioni, di E. GIORLI, di pag. VIII-166 con 148 figure 2 50

Moneta e falsa monetazione, di U. MANNUCCI, di p.XI-271 . . . . . 3 —

Monete, pesi e misure inglesi, di I. GHERSI, di p. XII-196, 46 tabelle di conti fatti (in ristampa).

Monete greche, di S. AMBROSOLI. 2ª ediz. rifatta da S. RICCI, di pag. XXV-609 con 670 inc., 2 tav. e 4 carte 9 50

Monete papali moderne di S. AMBROSOLI, di pagine XII-131 e 200 inc. 2 50

Monete romane, di F. GNECCHI. 3ª ediz. di p. XVI-418, con 203 fig. e 25 tav. (in ristampa).

Monete romane. I tipi monetari di Roma Imperiale, di F GNECCHI, di p. VIII-119 e 28 tav. . 5 —

Monogrammi, di A. SEVERI, 73 tavole a serie di due e di tre cifre (esaurito).

Monogrammi moderni, di A. SORESINA, in 35 tav. 3 —

Morfologia greca, di V. BETTEI, di p. XX-376 . 3 —

Morfologia italiana, di E. GORRA, di p. VI-142 . 1 50

Morte vera e morte apparente, di F. DELL'ACQUA, di p. VIII-136 . . . . . 2 —

Mosche - Vedi Insetti della casa.

L. C.

Mosti dei vini e degli spiriti. Densità ecc., di E. De Cillis, di p. XVI-280 . . . . . 2 —

Mosto (Dal) **al vino.** Fermentazione alcoolica, di S. Cettolini di p. XII-490, con 62 inc. 4 50

Motociclista (Man. del) *Side-cars e Motorettes*, di F. Borrino, 3ª ediz., rifatta, di p. XII-364 (in ristampa).

Motori Diesel — vedi Motori a olio pesante.

Motori a gaz, di V. Calzavara (2ª ediz. riveduta, di pag XXXVI-423 con 160 incisioni 4 50

Motori a olio pesante, a pressione ed a forza viva, di E. Garuffa, di pag. VIII-493, con 363 incisioni . 6 50

Motori a scoppio, di E. Garuffa, 4ª ediz., di pagine 790 con 843 incisioni 12 50

Motrici ad esplosione, a gaz povero, ad olii pesanti, a petrolio, per aviazione, Diesel, di F. Laurenti, 3ª ed. ampliata di p. 598, con 355 inc. 8 50

Municipalizzazione dei servizi pubblici, di C. Mezzanotte, di p. XX-324 . . . . . 3 —

Muratore (Il), di I. Andreani, 2ª ed. di p. 280 e 235 fig. 3 —

Musica. Espressione e interpretazione, di G. Magrini, di p. VIII-119 e 228 fig. . . . . 2 —

Musica (Manuale teorico pratico della), per le famiglie e le scuole di G. Magrini, 2ª ediz. di pag. 615 . . 5 50

Musica — vedi anche ai singoli titoli: Acustica musicale - Armonia - Arte e tecnica del canto - Ballo - Canto - Chitarra - Contrappunto - Mandolinista - Musica - Pianista - Psicologia musicale - Ritmica - Semiografia musicale - Storia della musica - Strumentazione - Strumenti ad arco - Violoncello - Violino.

Napoleone I., di L. Cappelletti, 3ª ed. di p. 306 . 3 —

Naturalista preparatore (Imbalsamatore), di R. Gestro, 5ª ediz., di p. XVI 214 e 52 fig. 2 50

Naturalista viaggiatore, di A. Issel e R. Gestro, di p. VIII-144 e 38 inc. (esaurito).

Nautica — vedi: Astronomia nautica - Attrezzatura navale - Avarie e sinistri marittimi - Bandiere - Canotaggio - Codice di marina - Costruttore navale - Doveri macchinista navale - Filonauta - Flotte moderne - Ingegnere navale - Lavori maritt. - Macch. navale - Nautica stimata - Nave.

Nautica stimata o navigazione piana, di F. Tami, di p. XXXII-179 e 47 fig. 2 50

Nave (La) **moderna da battaglia**, di G. Almagià, di pag. VIII-237, con 60 figure e tavole . . 4 —

Nave (La) **in ferro**, di E. Giorli di pag. VIII-413, con 197 illustrazioni 3 50

Nave (La) **subacquea.** Sottomarini e sommergibili di E. Campagna, di pag. 358, con 108 inc. e 8 tavole 5 50

Navigazione aerea (Aviazione), di A. De Maria, di p. XVI-338 e 103 fig. (in ristampa).

Nevrastenia, di L. Cappelletti di p. XX-490 (esaur.)

Notaio (Man. del), di A. Garetti, 9ª ediz. interamente rifatta, ampliata e messa al corrente con le nuavissime disposizioni di legge per cura dell'avv. G. V. Biancotti, di pag. XX-904 11

Lr G.

Numismatica. Atlante numismatico italiano, di S. AMBROSOLI, di p. XVI-428 e 1746 inc. . . 8 50

Numismatica (Manuale di), di S. AMBROSOLI, 5ª ediz., rifatta di F. GNECCHI, di pag. 248, con 40 tav. eliotipiche 7 50

Numismatica — vedi anche ai singoli titoli: Atene - Guida numismatica - Monete greche, papali, romane - Vocabol. numismatico.

Nuoto (Il). L'arte di nuotar bene, di A. BERETTA, di pag. XII-278, con 109 incisioni 2 50

Nutrizione del bambino, di L. COLOMBO, di p. XX-228 e 12 inc. 2 50

Oculistica (Manuale di), per Medici e Studenti, di D. BRUNO, di pag. XII-288, con 29 incisioni. 3 50

Occultismo, di N. LICÒ, di p XVI-328 . . . . . 3 —

Occultismo — vedi anche ai singoli titoli: Chiromanzia - Dizionario di scienze occulte - Magnetismo - Spiritismo - Telepatia.

Oceanografia, di G. MAGRINI (in lavoro).

Oftalmojatria veterinaria, di P. NEGRI e V. RICCIARELLI, di p. XVI-279, con 87 ill. e 15 tavole . 3 50

Olii vegetali. Piante erbacee a seme oleoso, di G. DEL NERO, di p. XV-313 e 41 inc. 3 50

Olii e grassi vegetali, animali e minerali, di G. Fabris, di pag. 546, con 23 inc. 5 50

Olivicoltura e industria dell'olio d'oliva, di F. R. SIMARI, di pag. XIX-465, con 146 incisioni . . 4 50

Omero, di W. GLADSTONE, trad. di R. Palumbo e C. Fiorilli (esaurito).

Operaio Manuale dell'), di G. BELLUOMINI, 8ª ediz., riveduta da I. GHERSI di p. 314 con 33 inc. 2 50

Operaio elettrotecnico, di G. MARCHI, 6ª ediz., ampliata, di p. XII-682 con 423 incisioni 7 50

Operaio (L') **meccanico al macchinario moderno d'officina,** di G. CHIOVATO, curata da C. ARPESANI, di pag. VIII-333 (in ristampa).

Orchidee, di A. PUCCI, di p. VI-303, e 95 inc. . . . . 3 —

Ordinamenti degli Stati liberi d'Europa, di F. RACIOPPI, 2ª ediz., di p. XII-316 . . . . . 3 —

Ordinamento degli Stati liberi fuori d'Europa, di F. RACIOPPI, di p. VIII-376 . . . . . 3 —

Oreficе (Man. per l'), di E. BOSELLI, 3ª ediz. rifatta da A. LINONE, di pag. 436, con 370 figure 7 50

Oreficeria floreale (Modelli), di A. MYLIUS, 50 tavole e testo . . . . . 3 —

Organista (Man. dell'), di C. LOCHER e pref. di F. Bossi, di p. XIV-187 . . . . . 2 50

Organoterapia, di E. REBUSCHINI, di p. VIII-432 . 3 50

Ornamenti sulle stoffe (L'arte di disporre gli), di E. CASARTELLI, di p. XI-37, 38 tav. e 170 disegni . 3 50

Ornatista (Man. dell'), di A. MELANI, 2ª ediz., XXVIII tav. e testo 4 50

Ornitologia italiana, di E. ARRIGONI DEGLI ODDI, di p. 907, 36 tav. e 401 fig. . . . . 18 —

Orologeria moderna, di E. GARUFFA, 2ª ediz., di p. VIII-384 e 366 fig. 5 50

L. C.

Orticoltura, di D. TAMARO, 5ª ediz. rifatta, di pag. 630, con 237 inc. 6 50

Ortoepia e ortografia italiana moderna, di G. MALAGOLI, 2ª ediz. riveduta, di pag. XX-294 . . 3 —

Ortofrenia. Educazione dei fanciulli, di P. PARISE, di p. XII-231 . . . . . 2 —

Ortopedia — vedi: Membra artificiali.

Ospedali — vedi: Igiene ospedaliera.

Ostetricia. Ginecologia minore, di L. M. BOSSI 2ª ediz. curata da V. DE BLASI, di pag. XV-497 con 127 figure . . . . . 6 —

Ostricoltura e mitilicoltura, di D. CARAZZI, di p. VIII-302 . . . . . 2 50

Ottica, di E. GELCICH, di p. XVI-576 e 261 fig. . . 6 —

Ottica (L') **di Euclide** di G. OVIO. di p. 4ª5, c. 260 inc. 7 50

Paga giornaliera (Prontuario della), da L. 0,50 a L. 10, di C. CARREGARO-NEGRIN. 2ª ediz., di p. X-463.

Paleoetnologia, di G. PINZA (in sostituzione del Manuale di REGAZZONI, in corso di stampa).

Paleografia greca e latina, di E. A. THOMPSON, trad. di G. Fumagalli, 3ª ediz., di p. XII-208, con 38 inc. e 8 tavole . . . . . 3 —

Paleontologia, di P. VINASSA DE REGNY, di p. XVII-512, con 356 fig. 5 50

Pane e panificazione, di G. ERCOLANI, di p. VIII-261, con 61 inc. e 4 tav (in ristampa)

Parrucchiere (Manuale del), di A. LIBERATI, di p. XII-219 e 88 inc. 2 50

Pasticciere e confettiere moderno, di G. CIOCCA, 2ª ediz., di pag. LXXII-470, con 136 illustrazioni e 36 tavole in cromo 10 50

Pastificio (Industria del), di R. ROVETTA, di p. XVI-240, 107 inc. e 4 tav. . . . . 3 —

Patate. Coltura e usi, di N. ADUCCI pag. 245 e 20 fig. . 2 50

Patologia degli infortuni sul lavoro in rapporto alla assicurazione, di T. CASAROTTI, pag. XV-642 6 —

Pedagogia (Storia della), di A. MORGANA, con prefazione di A. STRATICÒ, di pag. XIX-553 . . . . 4 —

Pedagogia (Elementi di), di G. VIDARI.

Vol. I. I dati della pedagogia, di pag. 412 . . . 3 50

Vol. II. La teoria dell'educazione, di pag. 498. . 7 50

Vol. III. La Didattica (in corso di stampa).

Pellagra. Storia, patogenesi, ecc., di G. ANTONINI, di p. VIII-166 e tav. . . . . 2 —

Perito meccanico (Il) nello studio di macch. idrovere, idrauliche, pneumofore, impianti industriali, ecc., di S. Dinaro, di pag. VIII-252 . . . . . 2 —

Pescatore (Man. del), di L. MANETTI (in ristampa).

Peso dei metalli, a U, a Y, a Z, a T e a doppio T, di G. BELLUOMINI, 2ª ediz., di pag. XXIV-248 (in ristampa).

Pianista (Il). Pensieri, giudizi e consigli sullo studio del pianoforte di V. RICCI, di pag. 263 . . . . 2 50

Piante aromatiche e medicinali (Coltivaz. delle) di C. CRAVERI, di pag. XXIX-307, con 71 incisioni . 6 50

Piante e fiori sulle finestre, nei cortili, ecc. di A. Pucci, 3ª ediz. di p. VIII-214 e 107 fig. . . . 2 [illegible]

L. C

Piante erbacee a seme oleoso, di G. DEL NERO, di p. XV-313 e 51 fig. 3 50
Piante industriali, A. ALOI, 3ª ed., p. XI-274, 64 inc. 2 50
Piante tessili, di M. A. SAVORGNAN D'OSOPPO, di p. XII-476 e 72 inc. (esaurito).
Pietre preziose, di U. MANNUCCI, di p. XVI-308, 23 inc. e 14 tav. 6 50
Pila elettrica (La), di A. ASTOLFONI, di p. XV-297, con 105 incis. . . . . 3 —
Pino da pinoli, di L. BIONDI e E. RIGHINI, p. XII-142 2 50
Pirotecnia moderna, di F. DI MAJO, 3ª ediz. riv. e ampliata da G. FIORINI, di pag. 198, con 130 inc. . 2 50
Piscicultura pratica del Prof. F. SUPINO di p. VIII-327, con 79 incisioni e 14 tavole 5 50
— vedi: Idrobiologia applicata.
Pittura. Fiori all'acquarello, ad olio ed a guazzo sulle stoffe, di G. RONCHETTI, di p. VIII-167, e 11 tav. . . 3 —
Pittura pei dilettanti, ad olio, acquarello e miniatura, G. RONCHETTI, 5ª ed., p. XVI-405, 30 inc. 32 tav. 4 50
Pittura italiana antica e moderna, di A. MELANI, 3ª ediz., di p. XVIII-527 e 164 tav. . . 12 —
Pittura murale. Affresco, tempera, ecc., di G. RONCHETTI, di p. XV-358 . . . . . 3 —
Pittura — vedi anche: Anatomia pittorica - Colori e vernici - Composizione delle tinte - Decorazione - Disegno - Luce e colori - Ristauratore dipinti - Scenografia - Storia dell'arte
Planetologia di E. CORTESE, di pag. VIII-387 con 12 figure e 2 tavole . . . . . 3 —
Pneumonite crupale e sua cura, di A. SERAFINI, di p. XVI-222 . . . . . 2 50
Poliedri, curve e superfici, secondo i metodi della Geometria descrittiva, di G. LORIA, di p. XVI-231 3 —
Poligonazione tacheometrica di A. BARBIERI, di pag. XVI-246 . . . . . 2 50
Polizia giudiziaria, ad uso dei Periti e Magistrati di L. TOMELLINI, di p. XX-352 e 161 inc. . . . . 5 —
Polizia sanitaria degli animali, di A. MINARDI, di p. VIII-333 e 7 fig. . . . . 3 —
Polli — vedi: Malattie dei polli - Avicoltura.
Pollicoltura, di G. TREVISANI. 9ª ediz., di pag. XVI-224 ed 88 incisioni (in ristampa).
Pomodoro. Coltivazione - industria, ecc., di R. ROVETTA, di pag. 295, con 90 figure . . . . . 3 —
Pomologia, G. MOLON, p. XXXII-717 86 inc. e 12 tav. 10 50
Pomologia artificiale, di M. DEL LUPO, di p. VI-132 e 34 inc. . . . . 2 —
Pompiere moderno. Manuale del vigile del fuoco, di P. COGOLI e R. RAMPINI, di p. 500, con 14 tav. e 526 fig. 7 50
Porco (Il), Razze, allev., ecc., di F. FAELLI, di p. XIX-461, con 100 fig. e 5 tavole . . . . . 6 —
Posologia dei rimedi più usati nella terapia infantile, di A. CONELLI, di p. VIII-186 . . 2 —
Posta. Manuale postale di A. PALOMBI, di p. XXX-309 3 —
Prati (I). Prati naturali, artificiali, pascoli, ecc., di E. MARCHETTANO, di p. VIII-392 e 162 inc. . . . . 4 —

L. C.

Prealpi bergamasche. Valsassina, Valtellina e Valcamonica, di A. STOPPANI e A. TARAMELLI, 3ª ediz. di p. 290, 15 tav. e 3 carte. 2 vol. in busta . . 6 50

Privative governative, Uffici di vendita e loro funzionamento. Rivendite, di I. GUASTALLA, p. XIX-406 3 50

Privative industriali — vedi: Codici e leggi Vol. IV (p. 14).

Processi fotomeccanici moderni, di R. NAMIAS, 2ª ediz., di pag. XI-321, con 76 figure e 12 tav. 4 —

Prodotti agricoli del tropico, di A. GASLINI, di p. XVI-270 (in ristampa).

Prodotti ceramici. Majoliche, porcellane, grès, di G. MADERNA, di p. XII-345 e 92 fig. 4 50

Prodotti chimici organici usati come medicamenti (Fabb. del) di C. CRAVERI. Prepar. caratt, reazioni, usi, dosi di 1600 prod. Pag. VIII-730 con 27 inc. 8 50

Prodotti e procedimenti nuovi nelle industrie (succedanei, surrogati, ecc.) di I. GHERSI, di pag. 986, con 148 inc. 9 50

Produzione e commercio del vino in Italia, di S. MONDINI, di p. VII-303 . . . . . 2 50

Profilassi e disinfezione per uso del R. Esercito del Cap. Medico V CHIODI, di pag. XII-196 con 32 inc. 4 50

Profumiere (Man. del), di A. ROSSI, 2ª ed., p. XXIV-650 7 50

Progettista moderno di costruzioni architettoniche, di I. ANDREANI, 2ª ediz. ampliata di pag. XV-559, con 196 inc. e 67 tavole 6 50

Projezioni fisse e cinematografo, di L. SASSI, di p. XVI-484, con 309 fig. . . . . 5 —

Prontuario del forestale. (Suolo, Selvicoltura, Rimboschimento, ecc.), di E. FERRARI, di pag. 460 con 59 tavole fuori testo 9 50

Prontuario tecnico legislativo, di G. VIVARELLI, di p. 300, con 131 inc. . . . . 3 —

Proprietario di case e opifici, di G. GIORDANI, di p. XX-264 . . . . . 1 50

Prospettiva, di C. CLAUDI, 3ª ed., p. XII-76 e 33 tav. 2 50

Prospettiva per gli scultori, il Bassorilievo, di A. NOELLI, di pag. XII-78, con 53 disegni . . . 2 50

Protezione degli animali, di N. LICÒ, di p. VIII-200 2 —

Protistologia, di L. MAGGI, 2ª ed., di p. 294 e 93 inc. 3 —

Proverbi e modi proverbiali italiani, di G. FRANCESCHI, di p. XIX-380 . . . . . 3 —

Proverbi sul cavallo, di C. VOLPINI, di p. XIX-172 2 50

Psichiatria. Confini, cause e fenomeni della pazzia, di J. FINZI, di p. VIII-225 (esaurito).

Psicologia, di C. CANTONI, 2ª ediz. (esaurito).

Psicologia fisiologica, di G. MANTOVANI, 2ª ediz., di p. XII-175 e 16 inc. 1 50

Psicologia musicale, di M. PILO, (esaurito).

Psicopatologia legale, di L. MONGERI, di p. XX-421 4 50

Psicoterapia, di G. PORTIGLIOTTI, p. XII-318 e22 inc. 3 —

Pugilato e lotta libera per difesa personale, di A. COUGNET, 2ª ed., p. XXXV-396 e 222 inc. 4 50

Raccoglitore di oggetti minuti e curiosi, di J. GELLI, di p. X 344 e 310 inc. . 5 50

Rachitide e deformità da essa prodotte, di P. MANCINI, di p. XXVIII-300 e 116 fig. . . 4 —

L. C.

Radioattività, di G. A. BLANC, pref. di A. Sella e Append. di G. D'ORMEA, di p. VIII-266 e 72 inc. . . 3 —

Raggi Röntgen e loro pratiche applicazioni, di I. TONTA, di p. VIII-160 (esaurito).
— vedi: Röutgen tecnica.

Ragioneria, di V. GITTI, 5ª ediz., di p. VIII-115 . 1 50

Ragioneria delle cooperative di consumo, di G. ROTA, (esaurito).

Ragioneria domestica, di A. MASETTI. 2ª ediz. di pag. XII-186 . . . . . 1 50

Ragioneria industriale, di O. BERGAMASCHI, 3ª ediz. a cura di A. MASETTI, di p. VIII-404 . . . 4 —

Ragioneria pubblica, di A. MASETTI, di p. XV-293 3 —

Ragioniere (Prontuario del), di E. GAGLIARDI. 2ª ed. rifatta ed aumentata, di pag. XII-603 . . . . 6 50

Razze bovine, equine, suine, ovine e caprine, di F. FAELLI 2ª ediz. ampliata di pag. XXXIII-512 con 197 tav. 12 50

Reattivi e reazioni di E. TOGNOLI, di pag. 289. . 3 50

Regolo calcolatore e applicazioni nelle operazioni topografiche, di G. POZZI, 2ª ediz., di p. XVI-303 e 150 fig. . . . . 3 —

Religione — vedi Bibbia - Corano - Imitazione Cristo - San Giovanni - San Paolo - Vangelo - Vita di Gesù - Vita di Maria.

Religioni primitive (L'idea di Dio nelle) di F. JEVONS e di U. PESTALOZZA, di pag. XVI-178 . . 2 —

Religioni e lingua dell'India inglese, di R. GUST, trad di A. De Gubernatis, di p. IV-124 . . 1 50

Residui agricoli, Utilizzazioni, ricuperi, di C. FORMENTI, di pag. 620, con 139 inc. . . . . 5 —

Residui industriali. Utilizzazioni Ricuperi, di C. FORMENTI, di p. XX-376 . . . . . 3 50

Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni, di G. SANDRINELLI, 3ª ediz., di p. XVIII-495 e 274 inc. 5 50

Resistenza e pesi di travi metalliche composte, di E. SCHENCK, 2ª ediz. (in corso di stampa).

Retorica, ad uso delle scuole, di F. CAPELLO, di p. VI-122 . . . . . 1 50

Rettili d'Italia, di C. VANDONI, di pag. 288 e 55 fig. 3 50

Ricami - v. Biancheria - Lavori femm. - Ma sh. da cucire - Monogrammi - Piccole ind. - Ricett. domest. - Trine.

Ricchezza mobile (L'imposta sui redditi di), di E. BRUNI, di pag. 240 . . . . 1 50

Ricerca di giacimenti minerali e acque sotterranee, di M. GROSSI (in lavoro).

Ricettario domestico, di I. GHERSI 6ª ediz., con 7192 ricette, di pag. 1299 e 172 inc. 16 50

Ricettario dell'elettricista, GHERSI, p. VIII-585 con oltre 2000 ricette e provvedimenti pratici e 43 inc. 6 —

Ricettario fotografico di L. SASSI, 5ª ediz., di pag. XXXII-362 . . . . . 3 50

Ricettario industriale, di I GHERSI, 6ª ediz., comprendente 8500 procedimenti utili (in ristampa).

Ricettario pratico per le industrie tessili e affini, di O. GIUDICI, di p. VIII-270 . . . . . 3 50

L. C.

Ricettario pratico di metallurgia, di G. BELLUOMINI, di p. XII-328 . . . . . 3 50

Rimedi. L'arte di prescriverli e di applicarli, di G. MALACRIDA, di p. 400 . . . . . 3 50

Rimedi — vedi: Specialità medicinali.

Riscaldamento, ventilazione e impianti di motori, di C. RUMOR e H. STROMENGER, di p. XVI-270 e 115 fig. 4 50

Riscaldamento elettrico. — Vedi Elettricità sorgente di calore.

Risorgimento italiano 1814-1871, di F. QUINTA VALLE, di pag. XVI-528 . . . . . 4 —

Ristauratore dei dipinti, di G. SECCO-SUARDO, 2ª ediz , con una introduz. di G. PREVIATI (in c. stampa)

Ritmica e metrica razionale italiana, di R. MURARI, 3ª ediz. di p. XV-239 (in ristampa).

Ritmica musicale, di A. TACCHINARDI, di p. XVI-254 3 —

Rivoluzione francese 1789-1799, di G. P. SOLERIO, (2ª ediz., in lavoro).

Roma antica — vedi: Antichità priv. - Antichità pubbliche - Archeologia - Epigrafia - Mitologia - Monete ovine (Le) del Palatino - Topografia - Mitologia.

Röntgen tecnica (I fondamenti della), di J. SCHINCAGLIA, di pag. XII-263, con 118 incisioni e 46 tavole. 5 50

Röntgen — vedi: Raggi di - Elettricità medica - Luce e salute - Radioattività.

Rose. Storia, coltivazione, varietà, di G. GIRARDI, di p. XVIII-284, 96 ill. e 8 tav. 3 50

Rovine del Palatino, di C. CANCOGNI, con pref. di R. Lanciani, di p. XV-178. 44 tav. e una pianta . 3 50

Saggiatore (Man. del), di F. BUTTARI, di p. VIII-245 2 50

Saldature autogene dei metalli, di S. RAGNO 2ª ediz., di pag. VI-129, con 18 inc. . . . . 3 —

Sale e saline, di A. DE GASPARIS, di p. VIII-358 e 24 fig. 3 50

Salsamentario. di L. MANETTI. di p 224 e 76 inc. 2 —

San Giovanni, il Discepolo che Gesu amava, di G. M. ZAMPINI, di pag. XII-314 . . . . . 4 50

San Paolo, Epistole, di G. M. ZAMPINI, di pag. XVI-406 4 —

Sanscrito (Studio del), F. G. FUMI. 3ª ediz. p. XVI-343 4 —

Saponi (L'industria dei), di V. SCANSETTI, con prefazione di E. MOLINARI, 2ª ediz. di pag. 574, con 131 inc. 8 50

Saponi da toeletta, di C. FRANCHI, di pag. XV-467 con 59 incisioni 5 50

Sarto tagliatore italiano (Il), di G. PETERLONGO, di p. XII-232 e 47 tav. 3 50

Scacchi (Giuoco degli), di A. SEGHIERI, 4ª ediz., a cura di E. MILIANI, di pag. VIII-550 . . . . . 7 —

Scenografia, G. FERRARI. p. XXIV-327, 16 inc. e 160 tav. 12 —

Scherma italiana, J. GELLI. Terza edizione riveduta di pag. 250 con 108 inc. . . . . 3 —

Scienza attuariale (Nozioni di). Matematica delle assicurazioni, di G. MINUTILLI, di pag. XIII-329 . . 4 —

Scienze (Le) **esatte nell'antica Grecia**, di G. LORIA, 2ª ediz. di pag. XXIV-974 . . . . . 9 50

Scienze giuridiche ed economiche in conformità dei programmi ministeriali ad uso degli Istituti tecnici, Licei moderni e Scuole di Commercio. (Enci-

L. C

clopedia giuridica - Diritto civile - Diritto commerciale e marittimo - Diritto penale - Procedura giudiziaria - Diritto costituzionale - Diritto ammin. - Economia politica - Politica comm. - Scienza della finanza - Statistica) di G. TRESPIOLI di p. XXIV-574, con 18 tav. col. 12 50

Scienze occulte (Dizionario di), di A. PAPPALARDO, di p. VIII-338 . . . . . 3 —

Scienze occulte — vedi: Chiromanzia - Fisionomia - Grafologia - Magn. - Occultismo - Spirit. Telepatia.

Scoutismo. Nozioni pratiche ad uso dei giovani esploratori ital., di F. ROMAGNOLI, di p. 598, c. 132 inc. 51 tav. 5 50

Scrittura a macchina — vedi Dattilografia.

Scrittura doppia americana, di C. BELLINI, 2ª ediz. accresciuta, di pag. XII-154 e 4 tabelle . . 2 —

Scritture d'affari, di D. MAFFIOLI, 5ª ed., p. VIII-221 1 50

Scrittura italiana antica e moderna, di A. MELANI, 3ª ediz., di pag. XXXII-692, 170 tavole e 40 fig. 12 —

Segnalazioni marit. — vedi: Attrezz. navale - Bandiere

Selfacting o filatojo intermittente, di L. TONELLI, di p. VIII-159 e 41 inc. 2 50

Selvicoltura, estimo e economia forestale, di A. SANTILLI, 2ª ediz. di p. XII-292 e 54 inc. . . . . 3 —

Selvicoltura — vedi: Boschi e pascoli - Consorzi di difesa del suolo - Coltura montana - Pino da pinoli - Prontuario del forestale.

Semejotica. Esame degli infermi, di U. GABBI, 2ª ediz., di pag. XVI-216 e 11 inc. 3 50

Semiografia musicale, di G. GASPERINI, p. VIII-317 3 50

Seta (Industria della), di L. GABBA, 2ª ediz. (esaurito).

Seta — vedi ai singoli titoli: Bachi da seta - Filatura e torcitura - Gelsicoltura - Tessitore - Tessitura - Tintura - Ricettari domestico e industriale.

Seta artificiale, di G. B. BACCIONI, di p. VIII-221 3 50

Sfere cosmografiche e geografia matematica, di L. A. ANDREINI, di p. XXIX-326 e 12 inc. . 3 —

Shakespeare, di E. DOWDEN, trad. di A. Balzani, di p. XII-242 . . . . . 1 50

Siderurgia, di E. ZOPPETTI e E. GARUFFA, (in ristampa).

Sieroterapia, di E. REBUSCHINI, di p. VIII-424 . 3 —

Sifilide (Patologia e terapia della) di A. PASINI, di pagine VI-151 . . . . . 2 —

Sinonimi latini, di D. FAVA, di p. LXIV-114. . 1 50

Sintassi francese razionale pratica, di D. RODARI, di p. XVI-206 . . . . . 1 50

Sintassi greca, di V. QUARANTA di p. XVIII-175 . 1 50

Sintassi latina, di T. G. PERASSI, 2ª ediz., di p. VII-168 1 50

Sismologia, di L. GATTA, di p. VIII-175 e 16 inc. 1 50

Sismologia moderna, di G. B. ALFANO, di p. XII-357 4 —

Smacchiatura industriale e casalinga di abiti, ecc., di G. TISCORNIA, di pag. XII-219 con 13 fig. 2 50

Smalto (Industria dello), di E. VERMA, di p. 246 e 30 inc. 3 —

Sistemazione dei torrenti e dei bacini montani, di C. VALENTINI, p. XII-298, 165 inc. e 46 tav. 4 50

Soccorsi d'urgenza, di C. CALLIANO, 9ª ediz ampliata rispetto ai feriti in guerra, a cura del Dott. B. Anglesio, di pag. LII-439, con 135 inc. 4 50

Socialismo, di G. BIRAGHI, di p. XV-285 (in ristampa)

L. C.

Società industriali per azioni di F. PICCINELLI, di p. XXXVI-534 . . . . . 5 50

Società di mutuo soccorso. Pensioni - sussidi, di G. GARDENGHI, di p. VI-152 . . . . . 1 50

Sociologia generale, di E. MORSELLI, (esaurito).

Soda caustica, cloro e clorati alcalini per elettrolisi, di P. VILLANI, di p. VIII 314 . 3 50

Somalo (Elementi di) vedi Gramm. somala.

Sordo-muto e sua istruzione, di P. FORNARI, di p. VIII-232 e 11 inc. . . . . 2 —

Sottomarini — vedi: Nave subacquea.

Sovratensioni negli impianti elettrici. Cause, effetti e protezioni, E. PIAZZOLI, pag. XVI-401 e 125 fig. 5 50

Specchi (Fabbricazione degli) **e la decorazione del vetro e del cristallo,** di R. NAMIAS, 2ª ediz. rifatta, di pag. XII-195 con 26 incisioni e 11 tavole . 2 50

Specialità medicinali (Formulario delle) di C. CRAVERI, di pagine XX-524 . . . . . 4 50

Spaleologia, Studio delle caverne, C. CASELLI, p. XII-168 1 50

Spettrofotometria applicata, di G. GALLERANI, di p. XIX-395, 92 inc. e 3 tav. . . . 3 50

Spettroscopio e sue applicazioni, di R. A. PROCTOR, trad. di F. Porro, di p. VI-179 e 71 inc. 1 50

Spiritismo, A. PAPPALARDO, 5ª ediz. aumentata, di pagine XVI-290. con 10 illustrazioni 3 50

Sports invernali. Pattinaggio, slitta, ecc., di N. SALVANESCHI, di p. XV-171 e 100 ill. . . . . 3 —

Stampaggio a caldo e bulloneria, di G. SCAMPERLA, di p. VIII-160 e 62 inc. . . . . 2 —

Stati del mondo (Gli), G. GAROLLO. Notiziario statist 1 —

Statistica, di F. VIRGILII, 7ª ediz. di pag. XII-227 . 3 —

Statmografia, di G. ROSSI, di pag. XII-214 . . . 3 —

Stearineria — vedi: Candele.

Stenografia, di G. GIORGETTI, 4ª ediz., di p. XV-239 3 —

Stenografia (Guida allo studio della), di A. NICOLETTI, 11ª ediz., riveduta da D. NICOLETTI, pag. 183 1 50

Stenografia (Esercizi di lettura e scrittura), di A. NICOLETTI. 6ª ediz. di p. VIII-160 . . . . 1 50

Stenografia. Antologia sten. di E. MOLINA, di p. 200 2 —

Stenografia. Dizionario etimologico stenografico, di E. MOLINA, di p. XVI 624 . . . . . 7 50

Stenografia. L'abbreviazione logica nella stenografia, di D. NICOLETTI, di pag. VIII-123 . . 1 50

Stenografo pratico, di L. CRISTOFOLI, di p. XII-131 1 50

Stereometria. Sviluppo dei solidi e loro costruzione in carta, di A. RIVELLI, di p. 90, con 92 inc. e 41 tav. 1 50

Stili architettonici (Gli), di B. CANELLA, di pagine XVI-133, con 114 illustrazioni e 64 tavole. . . . 3 50

Stilistica, di F. CAPELLO, di p. XII-164 (esaurito).

Stilistica latina, di A. BARTOLI, di p. XII-210 . . 1 50

Stime di lavori edili, di I. ANDREANI, di pag. 339 . 4 50

Storia antica, di I. GENTILE e G. TONIAZZO, in 2 vol.
I. L'Oriente antico, (esaurito).
II. La Grecia, di p. IV-216 . . . . . 1 50

L. c.

Storia dell'arte, di G. CAROTTI.
Vol. I. **L'Arte nell'Evo-antico**, di pag. LV-413 (esaurito).
Vol. II. **L'Arte nel Medio-evo:**
Parte I. - **Arte cristiana**, di pag. VIII-421 e 360 incis. 8 —
Parte II. - **L'arte regionale italiana nel medio-evo**, di pag. 667 con 553 incisioni 12 50
Parte III. - **L'Apogeo dell'arte italiana nel medio-evo**, di pag. 581 a 1390, con 591 incisioni . . . 15 —
Vol. III. **L'Arte nel rinascimento** (in lavoro).
Vol. IV. **L'Arte dell'Evo-moderno** (in lavoro).

Storia dell'arte militare, di V. ROSSETTO, di p. VIII-504 e 17 tav. 5 50

Storia e cronologia medioevale e moderna, di V. CASAGRANDI, 3ª ediz. di p. VIII-254 . . . 1 50

Storia d'Europa, di E. T. FREEMANN, trad. di A. GALANTE, di p. XII-472 . . . . . 3 —

Storia di Francia, di G. BRAGAGNOLO, di p. XVI-424 3 —

Storia d'Inghilterra, G. BRAGAGNOLO, p. XVI-367 3 —

Storia d'Italia, di P. ORSI, 5ª ediz., continuata fino al 1915, di pag. XIII-295 . . . . . 3 —

Storia — vedi: Antichità - Archeologia - Argentina - Astronomia nell'antico testamento - Atene - Commercio - Cristoforo Colombo - Cronologia - Dizionario biografico - Etnografia - Islamismo - Leggende - Manzoni - Mitologia - Monete - Numismatica - Omero - Risorgimento - Rivoluzione francese - Shakespeare - Topografia di Roma.

Storia delle matematiche (Guida allo studio della) di G. LORIA, di pag. XVI-227 . . . . . 3 —

Storia della musica, di A. UNTERSTEINER, 4ª ediz., di pag. 500 . . . . . 4 50

Storia naturale — vedi: Anatomia e fisiologia - Anatomia microscopica - Animali parass. - Antropologia - Batteriologia - Biologia animale - Botanica - Cammello - Coleotteri - Cristallografia - Ditteri - Embriologia - Farfalle - Fisica cristallografica - Fisiologia - Geologia - Imenotteri - Insetti - Ittiologia - Lepidotteri - Limnologia Mineralogia - Naturalista preparatore - Naturalista viaggiatore - Oceanografia - Ornitologia - Ostricoltura - Paleoetnologia - Paleontologia - Piscicoltura - Sismologia - Speleologia - Tecnica protistol. - Uccelli canori - Vulcanismo - Zebre - Zoologia.

Strade ferrate in Italia. Regime legale amministrativo, di F. TAJANI, di p. VIII-265 . . . . 2 50

Strade ordinarie e loro manutenzione, di F. FROSALI, di p. XI-216 e 37 inc. 2 50

Strade urbane e provinciali e loro pavimentazione di P. BRESADOLA, p. XVI-330 e 40 inc. 4 —

Strumentazione, di E. PROUT, trad. di V. Ricci, 2ª edizione, di pag. XVI-314 e 95 incisioni (in ristampa).

Strumenti ad arco e musica da camera, del Duca di CAFFARELLI, di p. X-235 (esaurito).

Strumenti diottrici, V. REINA, p. XIV-220 e 108 fig. 3 —

Strumenti metrici. Costruzione delle bilance, ecc., di E. BAGNOLI, di p. VIII-252 e 192 inc. 3 50

Succedanei — vedi: Prodotti e procedimenti.

L. c.

Sughero scorze e applicazioni industriali, di A. FUNARO e N. LOJACONO, di p. VII-170 . 2 50

Suinicoltura pratica, di I. STANGA, di pag. 200, con 36 illustrazioni 3 50

Superstizione, di G. FRANCESCHI, di pag. XII-264 . 2 50

Surrogati — vedi: Prodotti o procedimenti.

Tabacco (Il) e sua coltura, di G. BEVERSEN, di pagine XXVIII-219, 9 inc. e 31 tav.. . . . . 3 50

Tabacco, di G. CANTONI, di p IV-176 e 6 inc. . . 2 —

Tabelle di analisi — vedi: Analisi chimica qualitativa.

Tannini (I), nell'uva e nel vino, di R. AVERNA-SACCÀ, di p. VIII-240 . . . . . 2 50

Tartufi e funghi, coltura e cucinatura, di FOLCO-BRUNI, di p VIII-184 . . . . . 2 —

Tattica applicata, di A. PAVIA di p. VIII-214 . . 3 50

Teatro antico greco-romano, di V. INAMA, di p. XX-248 e 32 fig. 2 50

Tecnica protistologica. di L. MAGGI, di p. XVI-318 3 —

Tecnologie per i giovani operai, secondo i programmi governativi, di I. ANDREANI:

I. — Legno, metalli, ecc., di pag. 780, con 511 inc. . 7 —

II. — Matematica, di pag. XII-488, con 210 inc. . . 6 —

III. — Fisica, di pag. 354, con 288 incisioni . . . 6 —

Tecnologia e terminologia monetaria, di G. SACCHETTI, di p. XVI-191 . . . . . 2 —

Telaio meccanico (Il). Guida pratica, di A. PIOMBO di p. XII-159 e 28 fig. . . . . 2 —

Telefono (Il), di G. MOTTA, (in ristampa).

Telegrafia elettrica, aerea, sottomarina e senza fili di R. FERRINI. 4ª ed. ampl. da C. CANTANI, di pag. 352, con 137 inc. 3 50

Telegrafista (Guida del), di G. CANTANI, 4ª ediz., di pag. 255, con 138 inc. 3 50

Telegrafo senza fili e onde Hertziane, di O. MURANI, 3ª ediz., di p. 570 con 268 incisioni. . . 7 50

Telemetria, misura delle distanze in guerra, di G. BERTELLI, di p. XIII-145 e 12 fig. (in ristampa).

Telepatia. Trasmissione del pensiero di A. PAPPALARDO, 3ª ediz., di p. XVI-343 . . . . . 3 —

Tempera — Vedi acciaio.

Tennis (Il), di A. BONACOSSA e G. PORRO LAMBERTENGHI, di pag. XX-240 con 84 illustrazioni . . . 3 —

Teoria dei numeri, di U. SCARPIS, di p. VIII-152 . 1 50

Teoria delle ombre, di E. BONCI 3ª ediz. di pagine XVI-134, con 48 fig. e 6 tav. 2 50

Teosofia, di G. GIORDANO, di p. VIII-248 . . . . 2 50

Terapeutica — vedi ai singoli titoli: Chimica clinica - Chimica legale - Farmacista - Farmacoterapia - Medicina d'urgenza - Medico pratico - Organoterapia - Posologia rimedi - Rimedi - Terapia malattie infanzia.

Termodinamica. di G. CATTANEO, p. X-196 e 4 fig. 1 50

Terreno agrario. Chimica del terreno, di A. FUNARO, di p. VIII-200 . . . . . 2 —

Tessili — vedi Tecnologi per giovani - Tessitura - Filatura.

L. C.

Tessitore (Man. del), di P. PINCHETTI, 3ª ediz., di p. XIV-298 e illustr. 3 50
— vedi: Apparecchiatura dei tessuti - Industrie tessili.
Tessitura meccanica della lana e del cotone, di E. G. FRANZI, di p. VII-329 . . . . 3 50
Tessitura meccanica della seta, di P. PONCI, di p. XII-346 e 179 inc 5 50
Tessuti (Man. del compositore di), di P. PINCHETTI, di p. VIII-321, ill. da 2000 armature 4 50
Tessuti di lana e cotone (Analisi e fabbricazione), di O. GIUDICI, di p. XII-864, con 1098 inc. . . . 16 50
Testamenti (Manuale dei), di G. SERINA, 3ª ediz. riveduta ed ampliata, di pag. XIV-380 . . . . . 4 50
Tigré italiano, idiomi parlati in Eritrea, con 2 dizionari, di M. CAMPERIO, di p. 180 . . . . . 2 50
Tintore (Man. del), di R. LEPETIT, 4ª ediz., di p. 482 5 —
Tintura della seta, di T. PASCAL, di p. XV-432 5 —
Tipografia. Vol. I. Guida per chi stampa e fa stampare di S. LANDI, 2ª ediz. postuma, di pag. XXII-279 . 2 50
— Vol. II. Lezioni di composizione, di S. LANDI 2ª ediz. postuma, con appendice - Linotype - Monotype - Lettera-tipo - Vocabolarietto tecnico, di pag 370 . . 3 50
Tiro a segno nazionale, di A. BRUNO, p. VIII-335 3 —
Tisi (Come si vince la). Profilassi e diagnosi di F. MOTTOLA, e pref. di A. De Giovanni di p. XII-208 . . 2 50
Tisici e sanatori, di A. ZUBIANI, con pref. di B. Silva, di p. XLI-240 . . . . . 2 —
— vedi: Tubercolosi.
Topografia (Man. di), di G. DEL FABRO. 3ª edizione, di pag. XLIII-629 con 165 incisioni (in ristampa).
Topografia (Guida pei calcoli di), di G. DEL FABRO, di p. XVI-216 e 71 fig. 3 50
Topografia e rilievi — vedi: Cartografia - Catasto - Celerimensura - Codice del perito - Compensazioni errori - Curve - Disegno topogr. - Estimo terreni - Estimo rurale - Fotogrammetria - Geometria pratica - Prospettiva - Regolo calcolatore - Telemetria - Tracciamento curve - Triangolazioni.
Topografia di Roma antica, di L. BORSARI, di p. VIII-436 e 7 tav. 4 50
Tornitore meccanico (Guida del), di S. DINARO, 9ª ediz. riveduta con appendice "La tornitura dei projettili per le artiglierie", di pag. 306 e 106 fig. . 4 50
Tornitore e fresatore meccanico, di L. DUCA, 3ª ediz., di p. 188, con 30 inc. 3 50
Torrenti — v. (Sistemazione dei).
Tracciamento delle curve delle ferrovie e strade, di G. H. A. KRÖNKHE, trad. di L. Loria, 3ª ediz., di p. VIII-167 . . . . . 2 50
Traduttore tedesco (Il), di R. MINUTTI, pag. XVI-224 2 50
Tramvie — vedi: Ferrovie.
Trasporti aerei, di G. CAPPELLONI, di pag. XVI-367 con 259 figure. 5 50
Trasporti, tariffe e reclami ferroviari, di E. PELIZZARO, di pag. XVI-319 . . . . . 3 50

L. c.

Trazione ferrovaria, di P. Oppizzi, di p. VII-204, con 2 tav. e 51 fig. 3 50

Trazione a vapore sulle ferrovie ordinarie, di G. Ottone, di p. LXVIII.469 . . . . . 4 50

Triangolazioni topografiche e catastali, di O. Jacoangeli, di p. XIV-340 e 33 inc. 7 50

Trigonometria piana (Esercizi di), di C. Alasia, di p. XVI-292 e 30 inc. (in ristampa).

Trine a fuselli, di G. Romanelli-Marone, di p. VIII-331 e 200 illustr. 4 50

Tubercolosi (La), di M. Valtorta e G. Fanoli, con pref. di A. Murri, di p. XIX-291 e 11 tav. . . 3 —

Turbine idrauliche moderne. Teoria e costruzione, di C. Malavasi (in lavoro)

Turbine a vapore. di E. Garuffa (in corso stampa).

Turco parlato. Grammatica, dialoghi, vocabolario, di L. Bonelli e S. Jasigian, di p. VIII-343 . . 4 —

Uccelli canori. Caratteri, costumi e loro cura, di L Untersteiner, 2ª ediz., di p. VIII-226 e 6 inc. . . 2 50

Ufficiale italiano (L') di U. Morini (esaurito).

Unità assolute. Definizione, dimensione, problemi, di G Bertolini, di p. X-124 . . . . . 2 50

Uovo (L') **di gallina.** Conservazione e commercio, di C. Viviani, di pag. 394 con 48 incisioni . . . 3 50

Urina (L') nella diagnosi delle malattie, di F. Jorio, di p. XVI-216 (in ristampa).

Urologia chimica e microscopica, di P. E. Alessandri, di pag. 485, con 144 inc. e 2 tav. . . . 7 50

Usi mercantili riconosciuti dalle Camere di Commercio in Italia, di G. Trespioli, di p 623 6 —

Uve da tavola. Coltivazione e commercio, di D. Tamaro, 3ª ediz. di p. XVI-278, 8 tav. e 57 . 4 —

Vademecum dell'uomo d'affari, di C. Dompé, 2ª ediz., di pag. 562 . . . . . 8 50

Vangelo Manuale del) di G. M. Zampini . XLVII-480 4 50

Veleni e avvelenamenti, di C. Ferraris, di pagine XVI-208 e 20 inc. . 2 50

Ventilatori industriali, di A. Albert, di pag. 400, con 178 incisioni 7 50

Verbi regolari francesi, irregolari e difettivi, di C. Dompé, di pag. 170 . . . . . 3 —

Verbi greci anomali. P. Spagnotti, pag. XXIV-107 1 50

Verbi italiani, di E. Polcari, di p. XII-260 . . 1 50

Verbi latini di forma particolare nel perfetto e nel supino, di A. Pavanello, p. VI-215 1 50

Vernici, lacche, mastici e inchiostri da stampa. Fabbricazione, ecc., di U. Fornari, 3ª ediz., di pag. XVI-272 . . . . . 2 50

Vernici — vedi Colori e Vernici.

Veterinaria — vedi: Araldica zootecnica - Bestiame - Cavallo - Igiene veterinaria - Malattie infettive - Majale - Oftalmoiatria veterinaria - Polizia sanitaria - Porco - Profilassi malattie - Razze bovine - Zootecnia.

Veterinario (Man. del), di C. Roux e V. Lari, di pagine XX-356 e 16 fig. (esaurito).

Vetro. Fabbricazione, lavorazione, applicazioni, di G. D'Angelo, di p. XIX-527 e 521 fig. (esaurito).

L. C.

Vigile urbano (Vademecum pel) di G. SACCHIERO, di pag. XIV-178 . . . . . 2 50

Vini bianchi da pasto e vini mezzocolore, di G. A. PRATO. 2ª ediz. riv. da A. Strucchi, p. XII-280 2 50

Vini dai residui della vendemmia e vini sussidiari. Secondi vini e vinelli - Modo di aumentare la produzione di S. CETTOLINI di pag. 338 con 40 inc. 3 50

Vini (I migliori d'Italia), di A. STRUCCHI, di p. XX-25, 42 tav. e 7 carte 3 50

Vini non genuini, di A. DURSO-PENNISI di pag. 198, 2 50

Vini, aceti, spiriti (invecchiamento artificiale dei), di A. DURSO-PENNISI, di p. 185, con 35 inc. 2 50

Vini speciali provenienti da uve da tavola e vini artificiali, di A. DURSO-PENNISI, di p. XII-212 e 68 fig. 2 50

Vinificazione (Man. di), U. GALLO, p. XI-253 e 33 inc 2 50

Vino (Il), di G. GRAZZI-SONCINI, 2ª edizione riveduta da A. STRUCCHI, con appendice sui vini spumanti, di pag. XX-229 e 17 incisioni 2 50

Violini, violinisti e musica per violino, di A. UNTERSTEINER, con app. di A. Bonaventura, di pagine VIII-228 . . . . . 3 50

Violoncello, violoncellista e violoncellisti, di S. FORINA, di p. XVII-444 . . . . . 4 50

Viti meccaniche, calcolo e costruzione. di A. MASSENZ, di p. XVII-215, con 100 inc. (in ristampa).

Vita di Gesù di L. ASIOLI, 2ª ediz. con carta di Terra Santa. Pag XII-253 . . . . . 3 —

Vita di Maria di L. ASIOLI. Pag. VIII--202 . . . 3 —

Viticoltura (Precetti di), di O. OTTAVI, 7ª ediz. riv. da A. Strucchi, di p. XVI-244, con 30 incisioni . . 2 50

Vocabolario Albanese — vedi Albanese parlato.

Vocabolario araldico italiano, di G. GUELFI, di p. VIII-294 e 356 inc. (in ristampa).

Vocabolario Hoepli della lingua italiana, compilato da G. MARI, di pag. 2226 a due colonne in mezza pergamena e tela . . . . . 18 —

— legato in un solo volume in mezza pelle e tela . . 18 —

Vocabolario russo-italiano e italiano-russo, di V. FOMIN, con la pronunzia figurata seguita da un dizionaretto pografico dei nomi proprii, da un frasario e da due piccole grammatiche russa e italiana, di pag x-812 . . . . . 11 50

Vocabolario numismatico, in 7 lingue, di S. AMBROSOLI, di p. VIII-134 . . . . . 1 50

Vocabolario tecnico illustrato nelle sei lingue: Italiana, Francese, Tedesca, Inglese, Spagnuola, Russa, sistema Deinardt-Schloman, diviso in volumi per ogni singolo ramo della tecnica industriale.

Vol. I. — **Elementi di macchine e gli utensili più usuali per la lavorazione del legno e del metallo,** in-16, p. VIII-403, con 823 inc. e prefazione dell'Ing. Prof. G. COLOMBO (esaurito).

Vol. II. — **Elettrotecnica,** con circa 1000 inc. e numerose formule di p. XII-2100, a 2 e a 4 colonne 36 —

L. C.

Vol. III. — **Caldaie a vapore, Macchine a vapore Turbine a vapore**, p. XI-1322. con 3500 incis 22 50

Vol. IV. — **Motori a combustione**, di p. X-618 con 1300 inc. e numerose formule . . . . . 12 —

Vol. V. — **Ferrovie: Costruzione ed esercizio**, di p. XIII-870, con oltre 1900 inc. e numerose formule . 16 —

Vol. VI. — **Ferrovie: Materiale mobile**, con oltre 1500 illustr. . . . . 14 —

Vol. VII. — **Apparecchi di sollevamento e mezzi di trasporto**, di p. 650, con oltre 1500 inc. . . . 15 —

Vol. VIII. — **Il calcestruzzo armato nelle costruzioni**, di circa 600 pagine, con oltre 1200 inc. . . 8 50

Vol. IX. — **Macchine utensili**, di pagine X-706 con 2400 incisioni . . . . . 15 —

Vol. X. — **Veicoli a motore (automobili, motoscafi, aeronautica ed aviazione)**, con 1773 inc. . . . 18 —

Vol. XI. — **Siderurgia**, di pag. XII-785 con 1600 inc. 15 —

Volapuk (Dizion. Italiano-volapük), nozioni di gram., di C. MATTEI, secondo i principi dell'inventore M Schleyer, di p. XXX-198 . . . . . 2 50

Volapuk (Dizion. volapük-ital.), di C. MATTEI, p. XX- 2 50

Volapuk (Manuale di conversazione, di M. ROSA TOMMASI e A. ZAMBELLI, di p. 152 . . . . . 2 50

Vulcanismo, di L. GATTA, di p. VIII-268 e 28 inc. . 1 50

Zebre (Le) di A. GRIFFINI. Studio zoologico popolare illustrato, di pag. XXVIII-298, con 41 tavole . . . 4 —

Zinco. Caratteri e proprietà, di R. MUSU-BOY, di pagine XVI-219, 10 inc. e 4 tav. 3 50

Zolfo (Miniere di), di G. CAGNI, di p. XII-275 e 34 inc. . 3 —

Zoologia, di E. H. GIGLIOLI e CAVANNA G.

I. Invertebrati, di p. 200, con 45 figure (esaurito).

II. Vertebrati, Parte I, Generalità, Ittiopsidi (Pesci e Anfibi), di pag. XVI-153, con 33 inc.. . . . . 1 50

III. Vertebrati. Parte II, Sauropsidi, Teriopsidi (Rettili, Uccelli e Mammiferi, di p. XVI-200, con 22 inc. . 1 50

Zoonosi, di G. GALLI VALERIO, di p. XV-227 . . 1 50

Zootecnia, di G. TAMPELLINI, 2ª ediz., di p. XV-444, 179 inc. e 12 tav. 5 50

Zootecnia — vedi: Abitazioni animali - Animali da cortile - Alimentazione del bestiame - Araldica zootecnica - Bestiame - Cane - Cani e gatti - Cavallo - Maiale - Ornitologia - Porco - Razze bovine - Veterinario - Maniscalco.

Zucchero (Industria dello):

I. Coltivazione della barbabietola da zucchero, di B. R. DEBARBIERI, di p. XVI-220 con 12 inc. . . . 2 50

II. Commercio importanza economica e legislazione doganale, di L. FONTANA-RUSSO, di p. XII-244 2 50

III. Fabbricazione dello Zucchero di barbabietola, di A. TACCANI, di p. XII-228 con 71 inc.. . . . 3 50

Zucchero e alcool nei loro rapporti agricoli, fisiol. e soc., di S. LAURETI, di p. XVI-426 . 4 50

INDICE ALFABETICO PER AUTORI (I numeri indicano le pagine)

Abbe P. Nuotatore 40
Abetti C. A. Fiammiferi . . . 24
Acqua C. Microscopio 38
Adinolfi S. Diritto Intern. pen. 18
Adler G. Eserc. di lingua tedesca 23
Aducci N. Le patate 41
— La Fecola 24
Aducco A. Chimica agraria . . 12
Agnelli O. Divina Commedia . 19
Airy Q. B. Gravitazione . . . 29
Alasia C. Trigonometria (Eser.) 51
— Geomet. elem. (Complem. di) 27
— Geometria della sfera . . 27
Albert A. Ventilatori 51
Alberti F. Il bestiame e l'agricol. 8
Albi G. Capitano marittimo . 11
Albini Q. Fisiologia 24
Alessandri P. E. Anal. chim. qual. 5
— Analisi chimica quantitativa 5
— Analisi volumetrica . . . 5
— Chimica sostanze alimentari 12
— Disinfezione 19
— Farmacista 23
— Merceologia tecnica . . . 37
— Droghe medicinali 21
— Urologia 51
Alfano G. B. Sismologia moderna 46
Allevi G. Alcoolismo 4
— Le malattie dei lavoratori . 35
— Medicina sociale 37
Alleri A. Dizionario Eritreo . 20
Almagià G. La nave in battaglia 39
Alei A. Adulterazioni del vino 4
— Piante industriali 42
Aly-Belfadel A. Gram. magiara 28
Ambrosoli S. Atene 8
— Numismatica 40
— Atlante numismatico . . . 40
— Monete Greche 38
— Vocabolario pei numismatici 52
— Monete papali 38
Andreani I. Il progettista mod. 43
— Costruzioni lesionate . . . 17
— Corso completo di disegno . 19
— L'arte nei mestieri: Falegname - Fabbro - Muratore . 7 23 39
— Contratti e collaudi . . . 16
— Tecnologie per i giovani . 49
— Stime di lavori edili . . . 47
Andreini A. Sfere cosmografiche 46
Andrich G. L. Diritto italiano . 19
Andrevic G. Gr. Serbo-croata . 28
Antilli A. Disegno geometrico 19
Antonelli G. Igiene del sonno . 30
— Igiene della mente 29
— Igiene del piede 29
— Antropologia Criminale . . 6
Antonini E. Pellagra 41
Appiani G. Colori e vernici . 14
Arcangeli P. Letter. giapponese 32
Archetti A. Colle anim. e veg. 14
Arduino M. Consoli e consolati 15
— Diplomazia 18
— Emigrazione 22
Arlia C. Dizionario bibliogr. . 19
Arpesani C. Lav. metalli e legn. 31
— Operaio meccanico 40
Arrighi C. Dizionario milanese 20
Arrigoni E. Ornitologia . . . 40
Arti grafiche, ecc. 7
Artini E. I minerali 38
Aschieri F. Geom. projet. d. piano 27
— Geometria projett. d. spazio 27
Asioli L. Eloquenza 21
— Vita di Gesù 27-52
— Vita di Maria 35-52
Asprea V. Apicoltura 42
Astolfoni A., La pila elettrica 42
Averna-Sacca R. I tannini nel- l'uva e nel vino 6 49
— Malattie dei vini 35
Avigliano L. Giuoco d. dama 18
Azimonti E. Frumento . . . 25
— Campicello scolastico . . . 10
— Mais 35
Baccarini P. Malatt. crittogam. 35
Baccioni G. Seta artificiale . 46
Baddeley V. Law-Tennis . . 31
Bagneli E. Strumenti metrici . 43
Baldi C. Corti d'assise . . . 16
Ball J. Alpi (Le) 5
Ball R. Stawel. Meccanica . . 36
Ballerini O. Fiori artificiali . 24
Balsamo M. Laminaz. del ferro 31
Baluffi G. Cemento armato . 17
Balzani A. Shakepeare . . . 46
Barbieri A. Poligonazione . . 42
Bareschi E. Conversaz. franc. 16
Barpi U. Igiene veterinaria . 30
— Bestiame 8
— Abitaz. d. animali domestici. 3
Barth M. Analisi del vino . . 5
Barteli A. Stilistica latina . . 47
Bassi D. Mitologie orientali . 38
— Cultura greca 17
Bassoli G. Aerostatica . . . 4
Bastiani F. Lavori marittimi . 31
Belfiore G. Magnetis. ed ipnotis. 34
Belli B. Il Caffè 9
Belli C. M. Igiene ospedaliera 29
Bellini A. Igiene della pelle . 29
— Luce e salute 34
Bellini C. Scritt. dopp. all'amor. 46
Bellio V. Mare (Il) 35

Bellie V. Cristoforo Colombo 17
Bellotti S. Luce e colori . 34
Bellotti G. Bromatologia . . 9
Bellunomini G. Calderaio pratico 10
— Cubatura dei legnami . . . 17
— Fabbro ferraio 23
— Falegname ed ebanista . . 23
— Fonditore 25
— Operaio (Manuale dell') . . 40
— Peso dei metalli 41
— Ricettario di metallurgia . 45
Beltrami G. Filatura di cotone 24
Beltrami L. Aless. Manzoni . 35
Beltrandi C. I fagiani . . . 23
Benetti J. Meccanica 36
Beretta A. Il nuoto 40
Bergamaschi O. Contabilità dom. 16
— Ragioneria industriale . 44
Berlese A. Ins. d. case e dell'uomo 31
Bernardi G. Armonia 7
— Contrappunto 16
Bernhard. Infortuni di mont. . 30
— L'elioterapia in montagna. . 21
Bertelli Q. Disegno topografico 19
— Telemetria. 49
Bertelini G. Unità assolute. . 51
Bertolio S. Coltiv. Miniere. . 38
Bertoni G. Italia dialettale . . 31
Berzolari L. Geom. analit I. II. 26
Besta R. Anat. e fisiol. compar. 5
Bettei V. Morfologia greca. . 38
Bettoni G. Piscicoltura . . . 42
Beversen G. Tabacco 49
Biagi G. Bibliotecario . . . 9
Bianchi E. Merceologia. . . . 37
Biancotti G. V. Man. del Notaio 39
Bignami-Sormani E. Dis. alpino 19
Bilancioni G. Dis. botanica gen. 19
Bilinich, Dizionario serbo . . 20
Biondi L. Pino da pinoli . . 42
Biraghi G. Socialismo . . . 46
Bisconti A. Esercisi greci . . 23
Blanc G. A. Radioattività . . 44
Boccardini G. L'Euclide emend. 23
Bocciarde A. D. Elettr. medica 21
Bock C. Igiene privata . . . 29
Boito C. Disegno (Princ. del) . 19
Bolis A. Chimica analitica . . 12
Bombicci C. Mineral. generale 38
— Mineralogia descrittiva . . 38
Bonacossa A. Il tennis 49
Bonacini C. Fotografia ortocr. 25
Bonardi E. Borsa e valori pubbl. 9
Bonaventura A. Viol. e violinist. 52
Bonci E. Teoria delle ombre . 49
Bonelli L. Grammatica turca . 29
— Turco parlato 51
Bonetti E. Biancheria. . . . 9
— Abiti per signora . . . 3
Bonino G. B. Dialetti greci . 18
Bonizzi P. Colombi domestici . 14
Bonomi Da Ponte. Colori vern. 14
Borgarello E. Gastronomia. . 26
Borletti F. Celerimensura . . 11
— Form. per il calc. di risvolto 25
Borrino F. Motociclista . . . 39
Borsari L. Topogr. di Roma ant. 50
Boselli F. Orefice 40
Bossi L. M. Ostetricia . . . 41
Bottini-Barzizza G. Gnomonica 28
Bragagnole G. Storia di Francia 48
— Storia d'Inghilterra . . 48
Bresadola P. Condotte d'acqua . 3
— Strade urbane e provinciali 48
Brighenti E. Dis. greco moderno 20
— Crestomazia neo-ellenica . 17
— Conversazione neo-ellenica . 16
Brigiuti L. Letterat. egiziana 32
Brocherel G. Alpinismo . . . 5
Broggi U. Matemat. attuariale 36
Brovedani G. U. Elettricità ind. 21
Brown H. T. Meccanismi (500) 37
Bruni F. Tartufi e funghi . . 49
Bruni E. Catasto italiano . . 11
— Codice doganale italiano. . 13
— Contabilità dello Stato . . 16
— Imposte dirette 30
— Legislazione rurale . . . 32
— Ricchezza mobile 44
— Debito pubblico 18
— Legge notarile 32
Bruno A. Tiro a segno nazionale 50
Bruno D. Oculistica . . . 40
Bruttini A. Libro dell'agricoltore 4
— L'elettr. nell'agricoltura . . 21
Bucci di S. Flotte moderne . 25
Budan E.. Autografi (Amat. di) 3
Burali-Forti C. Logica matem. 34
Buttari F. Saggiatore (Mad. di) 45
— Alligazione. 5
Caccia A. Costruzione d. città 13
Caffarelli F. Strumenti ad arco 48
Cagni G. Le miniere di solfo 53
Calliano C. Soccorsi d'urgenza 46
— Assist. degli infermi . . . 7
Calzavara V. Industria de gas 26
— Motori a gas. 39
Campagna E. Nave subacquea 39
Campazzi E. N. Dinamometri . 18
Camperio M. Tigrè-italiano . . 50
Campi C. Campicello scolastico 10
Cancogni D. Il Palatino . . . 45
Canella R. Gli stili architettonici 47
Canestrini G. Fulmini e paraf. 26
— Antropologia 6
— Apicoltura 6
— Batteriologia 8
Canevazzi E. Araldica scotec 4
Cantamessa F Alcool . . . 9
Cantani. Telegrafista . . . 49

Cantani. Telegrafia. 49
Cantoni C. Logica 34
— Psicologia 43
Cantoni G. Tabacco (Il) . . . 49
Cantoni P. Igroscopi, igrom. . 30
Capalozza C. Ufficio di conciliaz. 15
Capello F. Rettorica 44
— Stilistica 47
Capilupi A. Assicuraz. e stima 7
Cappelletti L. Napoleone I.. . 39
— Nevrastenia 39
Cappelli A. Diz. di abbreviat. 3 19
— Cronologia e calend. perpetuo 17
Cappelloni G. Trasporti aerei . 50
Carazzi D. Ostricoltura . . . 41
— Anat. microsc. (Tecn. di) . 5
Carcoforo E. Elem. di somalo . 29
Carega di Muricce Agronomia 4
Carnevali T. Finanze 24
Carotti S. Storia dell'arte . 48
Carraroli A. Igiene rurale . . 29
Carregaro Negrin C. Paga giorn. 41
Casaburi V. Concia, tintura pelli 15
Casagrandi V. Storia e Cronol. 48
Casali A. Humus (L') 29
Casali I. Casette popolari . . 11
Casali P. Congelamenti . . . 15
Casarotti T. Pat. infortuni lav. 41
Casartelli E. Ornam. sulle stoffe 40
Caselli C. Speleologia 47
Castellani L. Acetilene (L'). . 3
— Incandescenza 30
Castiglioni L. Beneficenza . . 8
Castoldi A. Liquorista . . . 34
Cattaneo C. Dinamica element. 18
— Termodinamica 49
— Embriolog. morfol. . . . 22
— Malattie infanzia. 35
Cattaneo G. Convers. tedesca . 16
— Dizionario italiano-tedesco . 20
Cavalieri D. Legisl. delle acque 32
Cavanna G. Zoologia 53
Cavara P. Funghi mangerecci . 26
Cel L. Locomobili 34
— Caldaie a vapore 10
Celoria G. Astronomia . . . 7
Cerchiari G. L. Chir. e tatuag. 12
— Fisionomia e mimica . . . 24
Cereti P. E. Esercizi latini . . 23
Cerutti A. Fognat. domestica . 25
Cettolini S. Malattie dei vini . 35
— Dal mosto al vino 39
— Vini da residui e artificiali . 52
Chimenz S. Diz ital.-giapponese 20
Chiesa C. Logismografia . . . 34
Chiodi V. Profilassi e disinfez. 43
Chiorino E. Il falconiere mod. 23
Chievato G. L'operaio meccanico 40
Ciampoli D. Letteratura slave 33
Giappetti G. L'alcool industriale 4
Giappetti G. Indust. tartarica . 30
Cignoni A. Ingegnere navale . 31
Ciocca G. Pasticcere e confett. 41
— Gelati 26
Ciandi C. Prospettiva 43
Clerico G. v. Müller, Metrica . 37
Codici del Regno d'Italia . . 13
Cogoli P. Pompiere moderno . 42
Collamarini G. Biologia . . . 9
Colombo E. Repubbl. Argentina 6
Colombo G. Ingegnere civile 30-52
Colombo L. Nutriz. del bamb. . 40
Comboni E. Analisi del vino . 5
Concari T. Gramm. italiana 28
Conelli A. Posologia n. terap. inf. 42
Consoli S. Fonologia latina . 25
— Letteratura norvegiana . . 33
Conter P. Industrie galvan. . 22
— Galvanostegia 26
— Arti grafiche 7
Conti P. Giardino infantile . . 27
Contuzzi F. F. Diritto costitus. 18
— Diritto internaz. privato . . 18
— Diritto internaz. pubblico . 19
Corsi E. Codice del bollo . . 13
Cortese E. Metallurgia dell'oro 37
— Planetologia 42
Corti I. Letteratura inglese. . 32
Cossa A. Elettrochimica . . . 21
Cossa L. Economia politica . . 21
Costanzo G. Meteorologia agric. 37
Cougnet Pugilato antico e mod. 43
— La lotta greco-romana . . 34
— Lotte libere moderne. . . 34
Coulliaux L. Igiene della bocca 29
Craveri C. Insetti nocivi . . . 31
— Conifere. 15
— Essenze naturali. 23
— „ artificiali 23
— Piante aromatiche . . . 14 41
— Prod. chim. org. come medic. 43
— Specialità medicinali . . . 47
Cremona I. Alpi (Le) 5
Cristofoli a. Stenografo pratico 47
Crollalanza G. Araldica (Gr) . 6
Croppi G. Canotaggio . . . 10
Crotti F. Compens. degli errori 15
Cuneo A. Appalti Opere Pubbl. 6
Curti R. Infortuni della mont. 30
— L'elioterapia in montagna. . 21
Cust R. Relig. e lingue d. India 44
— Lingue d'Africa 33
D'Adda L. Marine da guerra . 35
Dal Piaz. Cognac 14
Damiani Lingue straniere . . 33
D'Angelo G. Vetro 51
Dante Alighieri. Tavole . . . 19
Da Ponte M. Distillazione . . 19
De Amezzaga. Marina militare 35
De Barbieri R. Zucchero(ind.d.) 8 53

De Bran A. Contab. comunale 16
— Contabilità aziende rurali . 15
De Cillis E. Mosti (Densità del) 39
De Franck Ph. Le carte magiche 11
De Gasparis A. Sale e saline . 45
De Gregorio G. Glottologia . 28
De Guarineni A. Lett. italiana 33
De Gubernatis A. Lett. indiana 32
— Lingue d'Africa 23
— Relig. e lingue dell'India . 44
Del Fabro G. Topografia . . 50
— Calcoli di topografia . . . 50
Dell'Acqua F. Morte vera e ap. 38
Del Lupo M. Pomol. artificiale 42
Del Nero G. Piante erbacee a seme oleoso. 42
De Marchi L. Meterologia . . 37
— Climatologia 13
De Maria A. Man. di Aviazione 8 39
De Martino A. Gram. persiana 28
De Mauri L Maioliche (Amatore) 34
— Amatore d'oggetti d'arte . 5
— Amatore miniature in avorio 5
Dessy. Elettrotecnica 22
Devoto L. Congelamenti . . . 15
Di Cele F. Imbalsamaz. umana 30
Di Maio F. Pirotecnia. . . . 42
Dinaro S. Tornitore meccanico 50
— Macchine (Montatore) . . 34
— Atlante di macchine . . . 34
— Meccanica industriale . . . 36
— Perito meccanico 41
— Macchine utensili 34
— Capo-meccanico 11
Dizionario univ. in 4 lingue . 21
Dompè C. Man. del commerc. . 15
— Vademecum uomo d'affari . 51
— Vorbi francesi 51
D'Onofrio G. Conserve aliment. 15
D'Ormea G. Radioattività . . 44
D'Ovidio Fr. Grammatica storica di lingua ital. 29
Dowden Shakespeare 46
Doyen C. Litografia 34
Duca L. Fres. torn. meccanico 25-50
Durso-Pennisi Diz. enologico 20
— Vini speciali e artifi. . . . 52
— Invecchiamento artific. vini 31-52
— Vini non genuini 52
Enciclopedia Hoepli 22
Ercolani G. Malaria e risaie . 35
— Il pane 41
Erede G. Geometria pratica . 27
Fabris G. Olii e grassi vegetali 40
Fachini S. Materie grasse . . 36
— Industria tessile 30
Faè G. Elettricità e materia . 21
Faelli F. Razze equine . . . 44
— Cani e gatti 10
— Animali da cortile 5
Faelli F. Il porco 42
Falco A. Contabilità bancaria . 16
— Corrispond. bancaria . . . 16
Falcone C. Anat. topografica . 5
— Embrione umano 22
Fanelli G. Tubercolosi 51
Fantasia P. Metodi min. qua dr 38
Fanti A. Costruzioni rurali . . 17
— La pratica delle bonificazioni 9
Faralli G. Ig. d. vita pub. e pr. 29
Farina G. Grammatica egiziana 28
Fascetti G. Caseificio 11
Fava D. Sinonimi latini . . . 46
Fenini C. Letteratura italiana. 33
Fenizia C. Evoluzione 23
Ferrari A. Lettura carte topogr. 33
Ferrari D. Arte (L') dal dire . 7
— Esercizi di grammatica . . 23
— Grammatica italiana . . . 28
Ferrari E. Boschi e pascoli . . 9
— L'agrumicol. in Italia e in Libia 4
— Prontuario forestale . . . 43
Ferrari G. Scenografia (La) . 45
Ferrari V. Lett. mod. italiana 33
— Lett. moderna e contemp. . 33
Ferrario C. Curve circolari . 17
— Curve graduate 17
Ferraris C. Veleni ed avvelen. 51
Ferreri Mitoldi S. Agrimensura 4
Ferretti U. Mal. inf. di animali 35
— Carni conservate 11
Ferrini C. Diritto pen. romano 19
Ferrini R. Energia fisica . . 22
— Elettricità 21
— Telegrafia 49
Ficai P. Estimo rurale . . . 23
Filippini P. Estimo dei terreni 23
Finzi J. Psichiatria 43
Fiori A. Dizionario tedesco . 20
— Conversazione tedesca . . 16
Fiorilli C. Omero 41
Fiorini G. Pirotecnia 42
Fogli O. Legnami ind. ed esotici 32
Fomin V. Vocabolario russo . 52
Fontana-Russo Zucchero . . 53
Foresti A. Mitologia greca . . 38
Forino L. Il violoncello . . . 52
Formentano A. Camera di cons. 10
Formenti C. Alluminio . . . 5
— Residui agricoli 44
— Residui industriali 44
Fornaseri G. Il cuore e suoi mali 17
Fornari P. Sordomuto (Il) . . 47
Fornari U. Vernici e lacche . 51
— Luce e suono 34
— Calore (Il) 10
Foster M. Fisiologia 24
Fracassi A. Il Corano. . . 16
Franceschi G. Cacciatore . . 9
— Corse 1

Franceschi G. Giuochi sportivi. 27
— Proverbi 43
— Superstizione 49
Franceschi G. B. Conserve alim 15
Franceschini F. Insetti utili . 31
— Insetti nocivi. 31
Franceschini G. Malattie sess. 35
Franceschini G. Malattie d. pelle 35
— Igiene sessuale 30
Franchi C. Saponi da toeletta . 45
Franchi L. I cinque Codici . . 13
— Codici e Leggi usuali d'Italia 13
— Gli otto codici 14
— Gli stessi, separati . . . 13
— Leggi sui lavori pubblici . 32
— Legge s. tasse di reg. e bollo 32
— „ sull'Ordin. giudiz. . . 32
— „ sanità e sicur. pubbl. 32
— Leggi sulle priv. industr. . 14
— „ diritti d'autore . . . 14
Franzi E. G. Tess. lana e cotone 50
Frazzoni D. Imbianchino decor. 30
Freemann E. T. Storia d'Europa 48
Friedmann S. Lingua gotica . 33
Frise L. Filosofia morale . . 24
Frisoni G. Gram. portogh. bras. 28
— Corrispondenza italiana . . 16
— „ spagnuola . 16
— „ francese . 16
— „ inglese . . 16
— „ tedesca . . 16
— „ portoghese . 16
— Dizionario spagnuolo . . . 20
— Gramm. Danese-Norveg. . 28
— Gramm. catalana 28
Frosali F. Le strade ordinarie 48
Fumagalli G. Bibliotecario . . 9
— Bibliografia 9
— Paleografia 41
— Ape latina 6
Fumi F. G. Sanscrito 45
Funaro A. Concimi (I) . . . 15
— Sughero, scorze e applic. . 49
— Terreno agrario 49
Gabba L. Chimico (Man. del) . 12
— Seta (Industria della) . . . 46
Gabbi U. Semeiotica 46
Gabelsberger-Noë Stenografia (Dizionario di) 47
Gabrielli F. Giuochi ginnastici 27
Gagliardi E. Interesse e sconto 31
— Ragioniere (Pront.) . . . 44
Galante T. Storia d'Europa . 48
Galassini B. Macc. cuc. e ricam. 34
Gallerani G. Spettrofotometria 47
Galletti E. Geografia 26
Galli G. Igiene privata . . . 29
Galli Valerio B. Zoonosi . . 53
— Immunità e res alle malattie 30
Gallizia P. Resist. dei materiali 44
Gallo U. Vinificazione 52
Gansser A. Man. del Conciatore 15
Gardenghi G. Soc. mutuo soc. 47
Garetti A. Notaio (Man. del) . 39
Gardini A. Chirurgia operator. 13
Garibaldi C. Econ. matematica 21
Garnier-Valetti Pomologia art. 42
Garollo G. Atlante geografico . 8
— Dizionario biograf. univ. . 19
— Enciclopedia (Piccola) Hoepli 22
— Dizionario geogr. univers. . 20
— Gli Stati del mondo . . . 47
Garuffa E. Orologeria 40
— Siderurgia 46
— Motori a scoppio 39
— Motori a olio pesante . . . 39
— Aviazione 8
— Turbine a vapore 51
Gaslini A. Prodotti del Tropico 43
Gasperini G. Semiogr. musicale 46
Gatta L. Sismologia 46
— Vulcanismo 53
Gautero G. Macch. e fuochista 34
Gavina F. Ballo (Manuale del) 8
Geikie A. Geografia fisica . . 26
— Geologia 26
Gelgich E. Cartografia . . . 11
— Ottica 41
Gelli J. Armi antiche 7
— Ex libris 23
— Biliardo 9
— Codice cavalleresco . . . 13
— Duellante 21
— Ginnastica maschile . . . 27
— Scherma 45
— Il raccoglitore 43
Gentile I. Archeologia . . . 6
— Geografia classica 26
— Storia antica 47
Gerseme G. Imitaz. di Cristo . 30
Gestro L. Natural. viaggiat. . 39
— Naturalista preparatore . . 39
Gherardi G. Carboni fossili . 11
Ghersi I. Galvanostegia . . . 26
— Industrie (Piccole) 30
— Inventore 31
— Matematica dilettevole . . 36
— Leghe metalliche 32
— Metallocromia 37
— Monete, pesi e misure ingl. 38
— Geometria (Problemi) . . . 27
— Ricettario domestico . . . 44
— Ricettario industriale . . . 44
— Ricettario dell'elettricità. . 44
— Prodotti e procedim. nuovi . 43
Giachetti C. Medicina d. spirito 37
Giannini G. G. Legatore di libri 31
Gibelli G. Idroterapia. . . . 29
Giglioli E. H Zoologia . . . 53
Gioppi L. Crittografia . . . 17

Gioppi L. Dizionario fotografico 20
— Fotografia industriale . . . 25
Giordani G. Proprietario di case 43
Giordano G. Teosofia 49
Giergetti S. Stenografia . . . 47
Gierli E. Disegno industriale . 19
— Aritmetica e Geometria . . 7
— Meccanico (Il). 36
— Macchinista navale 34
— Meccanica del macc. di bordo 36
— La nave in ferro 39
— Momenti d' inerzia 38
Giovannini F. I Balli d'oggi . 8
Girardi G Le rose 45
— Garofano 26
Gitti V. Computisteria . . . 15
— Ragioneria 44
Giua M. Acque minerali . . . 3
Giudici O. Tessuti di lana e cot. 50
— Ricettario industrie tessili . 44
Gladstone W. E. Omero . . . 40
Glasenapp M. Mattoni e pietre 36
Gnecchi F. Monete romane. . 38
— Guida numismatica. . . . 29
— Tipi monetari di Roma imp. 38
Gobbi U. Assicuraz. generale . 7
Goffi C. Acciai 3
— Apprendista meccanico . . 6
Goffi V. Disegnat. meccanico . 19
— Collaudazioni 14
— Modellatore meccanico . . 38
— Doveri del macchinista nav. 21
Goggia G. P. Fisica medica . 24
Gola G. Botanica 9
Gorini G. Colori e vernici . . 14
— Concia delle pelli 15
— Conserve alimentari . . . 15
Gorra E. Lingue neo-latine . 33
— Morfologia italiana. . . . 38
Grandgent C. N. Latino volgare 31
Grandori R. La filossera d. vite 24
Grassi F. Magnetismo e elettr. 34
Grazzi-Soncini G. Vino (Il). . 52
Griffini A. Coleotteri italiani . 14
— Ittiologia italiana 31
— Lepidotteri italiani 32
— Imenotteri italiani 30
— Le sebre 53
Griffini E. Arabo parlato in Libia 6
Grioni U. Ciclista 13
Groppali A. Filosofia d. Diritto 24
Grossi M. Ricerca giacimenti minerali e acque sotterr. 3 27 44
Grove G. Geografia 26
Guaita L. Colori e la pittura . 14
Guardabassi G Lignite e torba 33
Guareschi R. Fermentazioni . 24
Inchiostri 30
Guastalla I. Privative govern. 43
Guasti C. Imitazione di Cristo . 30
Guelfi C. Vocabolario araldico . 52
Guetta P. Il canto 10
Guyon B. Grammatica slovena 28
— Grammatica serba 28
Haeder H. Macchine a vapore . 34
Hooker I. Botanica 9
Hubert I. C. Antich. pubbl. rom. 6
Hugues L. Esercizi geografici . 22
— Scoperte geografiche . . . 17
Imitazione di Cristo 30
Imperato F. Attrezz. delle navi 3
Inama V. Letteratura greca . 32
— Grammatica greca 28
— Filologia classica 24
— Antichità greche 6
— Teatro antico greco-romano 4
Ingria R. Fondazioni idrauliche 35
Issel A. Naturalista viaggiat. . 39
Issel R. Biologia marina . . . 9
Jacoangeli O. Triangol. topog. 51
Janet P. Elettricità industriale 21
Jasigian S. Turco parlato . . 51
Jenkin F. Elettricità 21
Jevons F. B. L'idea di Dio nelle religioni primitive. 44
Jevons W. S. Economia polit. . 21
— Logica 34
Jona R. Cavi telegrafici . . . 11
Jones E. Calore (Il) 10
— Luce e suono 34
Jorio F. L'urina nella diagnosi 5 51
Kiepert R. Atlante geografico 3
— Esercizi geografici . . . 22
Kopp W. Antich. priv. dei rom 6
Krönke G. Tracciam. curve 18 50
Laing F. A. Letteratura inglese 32
Lacetti F. Fognatura biologica 25
La Leta B. M. Cosmografia. . 16
— Gnomonica. 28
Lanciani R. Le rovine d. Palatino 45
Landi D. Dis. di proiez. ortog. 19
Landi S. Tipografia (vol. I e II) 50
Lanfranco M. Prodi nei mis. elet. 38
Lange O. Letteratura tedesca . 33
Lanzoni P. Geografia commer. 26
Lari V. Manuale del veterinario 51
Larice R. Storia del commercio 15
Laurenti F. Motrici ad esplos. 39
Laureti S. Zucchero e alcool . 53
Le Boucher G. Diz. francese . 20
Leoni B. Lavori in terra . . 31
Leotti A. Albanese parlato . . 4
Lepetit R. Tintore. 50
Levi C. Fabbricati civ. di abit. 23
Levi C. Letteratura drammat. . 32
Levi I. Gramm. lingua ebraica 28
Levi-Malvano. Acciaio. . . . 3
Liberati A. Parrucchiere . . 41
Librandi V. Gramm. albanese 2
Licciardelli G. Coniglicoltura . 1

Licciardelli G. Il furetto . . 26
Licò N. Protes. degli animali . 43
— Occultismo 40
Linone A. Metalli preziosi . . 37
Liey P. Ditteri italiani . . . 19
Livi L. Antropometria . . . 6
Locher C. Man. dell'organista . 40
Lockyer I. N. Astronomia . . 7
Lojacono N. Sughero e scorze . 49
Lombardini A. Anat. pittorica 5
Lombroso G. Grafologia . . . 28
Lomonaco A. Igiene della vista 30
Lo Piano G. Elettricità e calore 21
Loria G. Geometria descrittiva 27
— Poliedri curve e superfici . 42
— La scienza dell'antica Grecia 45
— Storia delle matematiche . 48
Loria L. Tracciamento curve 18 50
Loris. Diritto amministrativo . 18
— Diritto civile 18
Lovera R. Gramm. greca mod. 28
— Grammatica rumena . . . 28
— Letteratura rumena . . . 33
Luxardo O. Merciologia . . . 37
Maccarone N. Latino volgare. . 31
Maddalena G. Tariffa dazi dog. 18
Maderna G. Prodotti ceramici . 43
Maffioli D. Diritti e dov. dei cit. 18
— Scritture d'affari 46
Maggi L. Protistologia . . . 43
— Tecnica protistologica. . . 49
Magnasco F. Lingua giapponese 33
— Lingua cinese parlata . . 33
Magrini E. Infortuni sul lavoro 30
— Abitazioni popolari 3
Magrini G. Limnologia . . . 33
— Oceanografia 40
Magrini G. Arte tecn. di canto 10
— Musica 39
Magrini G. P. Elettromotori . 21
Mainardi G. Esattore 22
Maineri R. Massaggio . . . 35
Malacrida G. Materia medica. 36
— L'arte di prescriv. i rimedi 45
Malagoli C. Ortoepia italiana . 41
Malatesta G. Cellulosa . . . 11
— Il Catrame 11
— Lignite e torba 33
Malavasi C. Ing. costrut. mecc. 31
— Turbine idrauliche 51
— Macchinista e fuochista . . 34
— 550 meccanismi 37
Malfatti B. Etnografia . . . 23
Mancini P. La rachitide . . . 43
Mancioli T. Malattie orecchio . 35
Manetti L. Man. del pescatore 41
— Caffettiere 9
— Salsamentario 45
— Droghiere 21
Manicardi C. Conser. prod. agr. 15
Mannucci M. Moneta e monetas. 38
Mannucci M. Pietre preziose . 42
Mantovani G. Psicolog. fisiol. . 43
Maometto. Il Corano 19
Maranesi E. Letterat. militare. 33
Marazza E. Stearineria . . . 47
Marcel C. Lingue straniere . . 34
Marchesi G. B. Gramm. italiana 28
Marchettano E. I prati . . . 42
Marchi E. Maiale (Il) 34
Marchi G. Operaio elett. . . 40
Marcolongo R. Eq. d. corpi elast. 22
— Mecc. razionale 36
Mari G. Vocabolario italiano . 52
Mariani A. Geografia economica 26
Mariani E. Amm.ni comunali . 5
Mariani V. Cinematografia . . 13
Marro A. Correnti alternate 16-30
— Ingegnere elettricista. . . 31
Martini E. Cultura greca . . 17
Marucchi O. Epigrafia cristiana 22
Marzorati E. Codice perito mis. 13
Masetti A. Logismografia . . 34
— Ragioneria pubblica . . . 44
— Ragioneria industriale . . 44
— Ragioneria domestica . . . 44
Masini M. U. Assist. ammalati. 7
Masotti A. Il Mesotorio . . . 37
Masseux A. Lavorazione acciai 3
— Meccanico moderno. . . . 36
— Viti meccaniche 52
— Fonditore metalli 25
Massere F. Aggiust. mecc. . . 4
— Meccanica applicata . . . 36
Mattei C. Volapük (Dizion.) . 53
Maurantonio L. L'arsenico . . 7
Mazzocchi L. Calci e cementi . 10
— Codice del perito misuratore 13
Mazzoccolo E. Legge comunale 31
Medri. Analisi chimiche . . . 5
Melani A. Architettura italiana 6
— Arte decorativa 7
— Insegnamento - Disegno . . 19
— Pittura italiana 42
— Ornatista 40
— Scultura italiana 46
Mellis-Marini F. Acquaforte . 3
Melli B. L'Eritrea 22
Menozzi. Alimentaz. bestiame. 4
Mercalli G. Geologia 27
Mercanti F. Animali parassiti . 5
Meyer E. Storia della Chimica 12
Meyer M. Colori e vernici . . 14
Meyer-Lübke G. Gram. storica 29
Mezzanotte C. Bonificazioni. . 9
— Municipalis. dei serv. pubbl. 39
Miliani E. Scacchi 45
Minardi A. Polizia sanitaria . 42
Minervini L. Terapia del cuore 17
Minozzi A. Fosfati 25

Minutilli G. Scienza attuariale 45
Minutti R. Letteratura tedesca 33
— Traduttore tedesco 50
Minutti Mitologia tedesca . . 38
Miola F. Cont. imprese elettrotec. 16
Molina E. Antologia stenogr. 6 47
Molina E. Dizionario stenogr. 20 47
Molina. Curatore dei fallimenti 17
Molina R. Esplodenti 23
Molon G. Pomologia 42
— Ampelografia 5
Molon G. Le jucche 31
Mondini S. Produzione dei vini 43
— Costruz. enotecniche . . . 17
Mongeri L. Malattie mentali . 35
— Psicopatologia legale . . 43
Montagna A. Fotosmaltografia 25
Montelatici G. Letter. bizant. 32
Montemartini L. Fisiol. veget. 24
Morelli L. Man. del Casaro . 11
Moreschi N. Antichità private . 5
Morgagna A. Storia d. pedagog. 41
Morgana G. Gramm. olandese . 28
Morini U. Ufficiale (Man. p. l') 51
Morselli E. Sociol. generale . 47
Motta G. Telefono 49
Mottola F. Come si vince la tisi 50
Muffone G. Fotografia . . . 25
Müller L. Metrica Greci e Rom. 37
Müller O. Logaritmi 34
Murani O. Fisica 24
— Telegrafia senza fili . . . 49
Murari L. Ritmica 45
Musatti E. Leggende popolari . 32
Musu-Bey R. Lo zinco . . . 53
Muzio C. Medico pratico . . . 37
— Malattie dei paesi caldi . . 35
Mylius A. Oreficeria floreale 40
Naccari P. Astronomia nautica 7
Nallino A. Arabo parlato . . 6
Namias R. Fabbr. degli specchi 47
— Processi fotomeccanici . . 43
— Chimica fotografica . . . 12
Nazari O Dialetti italici. . . 18
Negri P. Oftalmojatria veter. . 40
Negrin C. Paga giornaliera . 41
Negro C. Meteorol. agricola . 37
Nenci T. Bachi da Seta . . . 8
Nicoeli V. Alimentaz. bestiame 4
— Cooperative rurali . . . 16
— Costruzioni rurali 23
— Prontuario dell'agricoltore . 4
— Meccanica agraria 36
Nicoletti A. Stenografia (Guida) 47
— Esercizi di stenografia . . 47
Nicoletti D. Abbreviaz. stenogr. 47
Noelli A. Prospettiva p. scult. 43
Nonin A. Il garofano 26
Noseda E. Legislaz. sanitaria . 32
— Lavoro delle donne e fanciulli 31
Noseda E. Codice ingegnere . 13
— Codice del lavoro 13
Oddone F. T. Lavori femminili 31
Olivari G Filonauta 24
Olme C. Diritto ecclesiastico . 18
Oppizzi P. Trazione ferroviaria 51
Oppizzi P. Ferrovie e tramvie 24
Orlila E. La madreperla . . 34
Orlandi G. Celerimensura . . 11
Orsi P. Storia d'Italia . . . 48
Ostwald W. Chimica analitica . 12
Ottavi O. Enologia 22
— Viticoltura. 52
Ottolenghi A. Canto gregoriano 10
Ottone G. Trazione a vapore . 51
Ovio G. Ottica di Euclide . . 41
Padovan A. Epigrafia italiana . 22
Padovani G. Letterat. francese 32
Pagani C. Assic. sulla vita . . 7
Paganini P. Fotogrammetria . 25
Palombi A. Manuale postale . 42
Palumbo R. Omero. 40
Panizza F. Aritmetica razion. . 7
— Aritmetica pratica 7
— Esercizi Aritmetica raz. . . 7
Panizzon G. Analisi qualitativa 5
Paoletti S. Invenzioni utili . . 31
Paoloni P. Disegno assonom. . 19
Pappalardo A. Spiritismo . . 47
— Dizionario scienze occulte . 46
— Telepatia 49
Parise P. Ortofrenia 41
Parisi P. Lettaratura univers. . 33
Paroli E. Grammatica sved. . 29
Pascal T. Tintura della seta . 50
Pascal E. Calcolo differenziale 10
— Calcolo integrale 10
— Calcolo delle variazioni . . 10
— Determinanti 18
— Esercizi di calcolo . . . 10
— Funzioni ellittiche 26
— Gruppi di trasformazioni . . 29
— Matematiche superiori . 36
Pasini A. Sifilide 46
Pavanello F. A. Verbi latini . 51
Pavia A. Tattica applicata . . 49
Pavia L. Grammatica tedesca . 29
— Grammatica inglese . . . 28
— Grammatica spagnuola . . 29
Pavolini E. Buddismo. . . . 9
Pavone L. Man. del bottaio . 9
Payn G. Dizionario inglese . 20
Pecchiai P. Man. per gli archiv. 6
Pedicino N. Botanica 9
Pedretti G. Automobilista (L') . 8
— Guida d. mecc. Chauffeur . 12
— Chauffeur di sè stesso . . 12
Pedrini. Casa dell'avvenire. . 1
— Città moderna 1
Peglion V. Fillossera 2

Pelizzare E. Trasporti e tariffe 50
Pellerano L. Aurocromista . . 8
Pellizza A. Chimica sost. color. 14
Penzig O. Flora delle Alpi . . 26
Perassi T. G. Sintassi latina . 46
Percossi R. Calligrafia . . 10
Perdomini O. Corrisp. telefonica 16
Perdoni T. Idraulica . . . 29
Pesce P. A. Macelli moderni . 34
— Malattie dei cani 10
Pesce P. A. Malatti dei polli . 35
— Malattie degli animali utili. 35
Pestalozza U. Relig. primitive. 44
Peterlongo G. Man. del sarto . 45
Petri L. Computisteria agraria 15
Petzholdt. Bibliotecario . . 9
Piazzoli E. Illuminaz. elettr. . 30
— Sovraten. negli imp elettr. 47
Piccinelli F. Società per azioni 47
Piccinini P. Farmacoterapia . 24
Pieraccini A. Assist. dei parti 7
Pile M. Estetica 23
— Psicologia musicale. . . . 43
Pincherle S. Algebra element. 4
— Algebra (Esercizi) 4
— Algebra complementare . . 4
— Geometria (Esercizi) . . . 27
— Geom. metrica e trigometria 27
— Geometria pura 27
Pinchetti P. Tessitore . . . 50
— Compositore di tessuti . . 50
Pini P. Epilessia 22
Pinza G. Paleoetnologia 41
Piombo A. R. Telaio meccanico 49
Pisani A. Mandolinista . . . 35
— Chitarra 13
Pizzamiglio G. Costrus. metall. 17
Pizzi L. Letteratura persiana . 33
— Islamismo 31
— Letteratura araba 32
Pizzini L. Disinfezione . . . 19
— Microbiologia 37
Plassie E. Il cammello . . . 10
Plebani B. Arte della memoria 7
Polacco L. Divina Commedia . 19
Policari E. Grammatica storica 29
— Verbi italiani 51
Ponci P. Tessitura seta . . . 50
Porro F. Spettroscopio . . . 47
— Gravitazione 29
Porro-Lambertenghi G. Il tennis 49
Portal E. Letterat. provenzale 33
— Antologia provenzale . . . 6
— Grammatica provenzale . . 28
Portigliotti C. Psicoterapia . 43
Pozzi G. Regolo calcolatore . 44
Prat G Grammatica francese . 28
— Esercizi di traduzione . . 23
— Lectures françaises . . . 31
Prato G. Cognac 14
Prato G. Vini bianchi 52
Prato M. Industria tintoria . . 30
Procter R. A. Spettroscopio . 47
Provasi A. Filatura della seta. 24
Prout E. Strumentazione . . 48
Pucci A. Frutta minori . . . 26
— Piante e fiori 41
Pucci A. Orchidee 40
— Il giardiniere I e II . . . 27
Pucci C. Il maiale 34
Pugliese A., Fieni italiani . . 24
Pullè F. Congelamenti . . . 15
Quaio E. Calcoli fatti . . . 10
Quaranta V Sintassi greca . 46
Quintavalle F. Risorg. italiano 45
Rabbeno A. Mezzeria . . . 37
— Ipoteche (Manuale per le) 31
— Consorzi di difesa del suolo 15
Raccioppi F. Ordinamento degli Stati liberi d'Europa . . 46
Raccioppi F. Ordinamento degli Stati liberi fuori d'Europa . 40
Ragazzi M. Igiene della scuola 29
Ragno S. Saldature dei metalli 45
Raina M. Logaritmi 34
Ramenzoni L. Cappellaio . . 11
Ramorino F. Letterat. romana 33
— Mitologia (Dizionario di) . 38
— Mitologia classica illustrata. 38
Rampini R. Pompiere moderno 42
Ranelletti C. Geom. descrittiva 26
— Applicaz. di geom. descrittiva 26
Ranzoli C. Dizion. scienze filos. 20
Rasio S. La Birra 9
Re O. Cinematografo 13
Rebuschini C. Malattie sangue 35
— Organoterapia 40
— Sieroterapia 46
Regazzoni J. Paleoetnologia 41
Reggiani E. La produs. del latte 31
Reina V. Teoria strum. diottrici 48
Repossi A. Igiene scolastica 29
Revel A. Letteratura ebraica 32
Revelli P. Manuale coloniale 14
Revere G. Matt. e pietre sabbia 36
— I laterizi 31
Ribolla R. Il medico a borde . 37
Ricci A. Marmista 35
Ricci E. Chimica 12
Ricci S. Epigrafia latina . . 12
— Archeologia Arte etr., greca, 6
— Monete greche 38
Ricci V. Stramentazione . . 48
— Pianista 41
Ricciarelli V. Oftalmojatria . 40
Righetti E. Asfalto . . . 7
Righini E. Pino da pinoli . . 42
Rigutini G. Dis. inglese-italiano 20
Rizzi G. Man. del Capomastro 11
Rizzini E. Colori e vernici . . 14

Rivelli A. Stereometria . . 47
Roatta G. B. L'elioterapia med. 21
Rocca G. Assicurazione 7
Roda Flli. Floricoltura . . 24
Rodari D. Sintassi francese 46
— Esercizi sintattici . . . 23
Rodella A. Diabete melito . . 18
Romagnoli F. Scoutismo . . . 46
Romanelli-M G. Trine al fuselle 51
Romanelli U. Acetilene . . . 3
Ronchetti G. Pittura per dilett. 42
— Pittura murale 42
— Grammat. di diseg. . . . 19
— L'arte di dipingere s. stoffe 49
— Composizione delle tinte. . 15
Roscoe H. E. Chimica 17
Rossetto V. Storia Arte Milit. 48
— Avarie e sinistri marittimi 8
Rossi A. Liquorista 34
— Profumerie 43
Rossi C. Costruttore navale . 17
Rossi G. B. L'arte dell'arazzo . 6
Rossi G. Statmografia 47
Rossetti M. A. Form. di matem. 25
Rota G. Ragioneria cooperat. . 44
Roux C. Man. del Veterinario . 51
Rovetta R. Pastificio 41
— Pomodoro 42
Ruata G. Igienista 30
Rumor C. Riscaldamento . . 45
Sacerdote G. Dizionario tedesco 20
Saccheri P. G. L'Euclide emen. 23
Sacchetti G. Tecnologia monet. 49
Sacchiero G. Vigile urbano . 52
Sala A. Balbuzie (Cura delle) . 8
Salvagni G. Fig. grammaticali 24
Salvaneschi N. Sports invernali 47
Salvatore A. Leggi infort. lav. 32
Samarani F. Birra 9
Sanarelli. Igiene del lavoro . 29
Sandri C Canali in terra e mur. 10
Sandrinelli G. Resistens. mater. 44
Sannino F. A. Cognac . . . 14
Sansoni F. Cristallografia . . 17
Santilli. Selvicoltura 46
Sanvisenti B. Letterat. spagn. 33
Sardi E. Espropriazioni . . . 23
Sarteri L. Carta (Industr. della) 11
Sassi L. Carte fotografiche . . 11
— Ricettario fotografico . . . 44
— Proiezioni (Le) 43
— Fotografia a colori 25
— Fotocromotografia 25
— Fotografia senza obbiettivo. 25
— Primi passi in fotografia . 25
Saulle I. Dattilografia . . . 18
Savoia U. Metallografia . . . 37
Savergnan M. A. Piante tessili 42
Scanferia G. Stamp. a caldo . 47
Scansetti V. Saponi 45
Scansetti V. Candele (l'indus. d.) 10
Scarano L. Dantologia 18
Scarpis H. Teoria dei numeri . 48
Scartazzini e A Dantologia . 18
Schenck E. Resis. travi metall. 44
Schiaparelli G. V. L'astronomia 8
Schincaglia J. La Röntg n tec. 45
Scialhub G. Gramm. italo- 28
-colari C. Dizionario alpino . 19
Secco-Suardo. Ristau. dipinti . 45
Seghieri A. Scacchi . . . 45
Seguenza L. Il geol. in camp 26
Sella A. Fisica cristallografica 24
Senna A. Le farfalle . . . 22
Serafini A. Pneumonite crupale 52
Sergi S. L'antropologia . . 6
Serina L. Testamenti . . . 50
S rnagiotte R. Enol. domestica 22
S sa G. Dottrina popolare . 21
S tti A. Man. del Giurato . . 27
S ttimi L. Caoutchouc . . . 11
Gomme, resine, ecc. . 28
Severi A. Monogrammi 38
Signa A. Barbab. da succhero 8
Siber-Millet C. Molini e macin. 38
Silva B. Tisici e sanatori . 50
Simari F. R. Olivicoltura . 40
Sisto A. Diritto marittimo . 19
Soldani G. Agronom. moderna 4
Solerio G. P. Rivolus. francese 45
Soli G. Didattica 18
Soresina A. Monogr. moderni 38
Spagnotti P. Verbi greci 51
Spampani G. Cultura montana 15
Spatare D. Fognat. cittadina 25
Sperandeo P. G. Lingua russa 33
Stanga I. Suinicoltura . . . 49
Stecchi R. Chirurgia operator. 13
Stöffler E. Matt. e pietre sabb. 36
Steppani A. Geografia fisica 26
— Geologia 27
— Prealpi bergamasche . . 43
Steppate L. Fonologia italiana 25
Straffarello G. Alimentazione 4
— Errori e pregiudizi . . . 22
— Letteratura americana . . 32
Stratico A. Letteratura alban. 32
Strebino G. Apparecch. d. tessuti 6
Strehmenger H. Riscaldamento 45
Stracchi A. Cantiniere . . . 10
— Enologia 22
— I migliori vini d'Italia . . 52
— Viticoltura 52
— Man. del bottaio 9
— Vini bianchi 52
Supino F. Idrobiologia . . . 29
— Piscicoltura pratica . . . 42
Supino R. Chimica clinica . . 4
Suzzi A. Lawn-Tennis . . .
Tabanelli L. Codice del teatro